http://www.circ-ien-andolsheim.ac-strasbourg.fr/IMG/pdf/colmar app nombre sept 2016 v2 cle044381.pdf

Apprendre le nombre

Cycle 1 et Cycle 2

Michel Fayol
Université de Clermont Blaise Pascal & CNRS
Michel.fayol@univ-bpclermont.fr

Pourquoi en sommes-nous là?

- Importance des mathématiques pour la réussite académique et professionnelle ;
- Comparaisons internationales : très importantes différences et **inégalités** ;
- **Précocité** des inégalités : importance du milieu socio-culturel et de la préscolarisation (R3);
- Recherches : **espérer des améliorations** si interventions **précoces** ; sur quoi? comment prédire les performances ultérieures?
- Performances en mathématiques : **hétérogénéité des composantes** (R4) ;

Un bilan des difficultés

- Les enfants et les élèves éprouvent parfois des **difficultés** en mathématiques, même très précocement R1) ; renforcé par l'image ;
- **Plusieurs domaines** sont concernés :
  - Propres aux **mathématiques** : sens du nombre, dénombrement, opérations, etc. ;
  - **Capacités générales** : langage, attention, mémoire de travail, vitesse, émotions, **anxiété** (R4) ;
  - **Instruction** dispensée, très tôt, familles ou école (R3) ;

Objectifs

- **Permettre la réussite pour tous** ; individualiser ; gérer les apprentissages et les interventions :
  - **Prévenir** les échecs (mais non les obstacles) et l'anxiété : curricula ; démarches adaptées ; outils divers avec indications précisées ;
  - **Traiter en temps réel** les difficultés : aider à les surmonter ; connaissance des modalités d'apprentissage ; **formation des enseignants** R6 ;
  - **Remédier** si les difficultés ne sont pas surmontées par les interventions pédagogiques en première intention ;

Comment faire face?

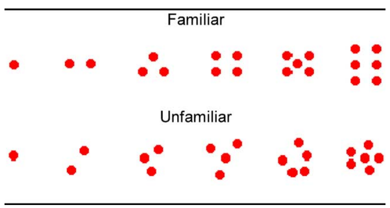
- **Enseigner formellement** et **explicitement** ; souvent efficace ; effets attestés de l'enseignement structuré et explicite, avec feed-back ; programmer ; évaluer ;
- Induire les savoirs et savoir-faire par le biais **d'activités ludiques** (plus ou moins), conçues de manière à **contraindre les acquisitions** ; apprentissage implicite ;
- École maternelle et école élémentaire ;

Que savent-il à l'entrée en maternelle?

Trois types de savoirs

Les petites quantités; les grandes quantités; des noms de nombres

Discriminer les petites quantités

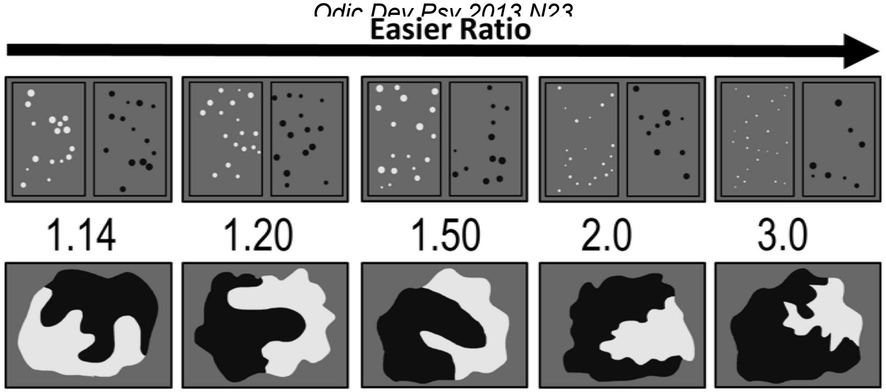


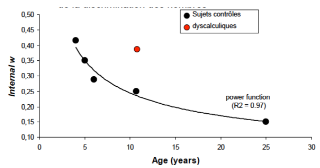
Subitizing

Sans doute associée aux capacités de mémoire à court terme visuelle ;
Ne signifie pas qu'ils comprennent la quantité de référence ; ni qu'ils l'associent aux symboles verbaux ou indo-arabes ;
Peut s'étendre à des quantités plus grandes si configurations particulières (domino, dés) ;
Peut être sélectivement affectée ;

Comparaisons de grandeurs et quantités

Odic Dev Psy 2013 N23





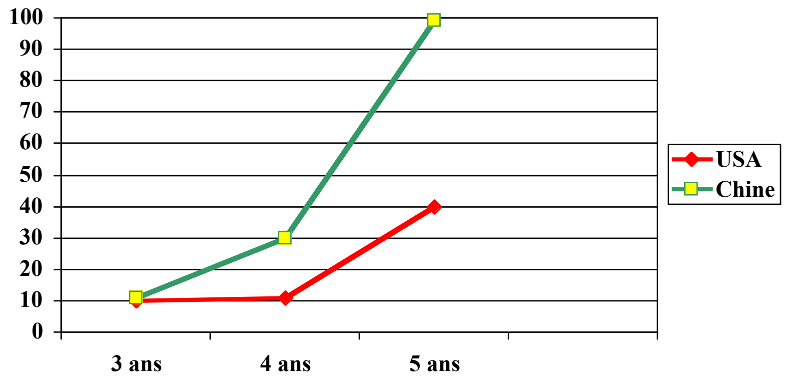
Deux capacités de base

- Traitement précis des petites quantités: non numérique? MT? Rarement affecté ;
- Traitement **approximatif** des grandes quantités:
  - Imprécision diminue avec **l'âge** ;
  - Imprécision diminue avec **l'éducation** ;
  - **Prédirait** partiellement les performances **ultérieures** en arithmétique élémentaire ; importance des interventions ;
  - Est **améliorable** par exercice ;

Représentation verbale
Comparaison anglais, chinois, français

	Français	Anglais	Chinois
1	un, une	one	yi
2	deux	two	er
3	trois	three	san
10	dix	ten	shi
11	onze	eleven	shi yi
12	douze	twelve	shi er
13	treize	thirteen	shi san
20	vingt	twenty	er shi
21	vingt et un	twenty-one	er shi yi
22	vingt-deux	twenty-two	er shi er
23	vingt-trois	twenty-three	er shi san

Impact des caractéristiques verbales sur l'acquisition de la numération verbale
Comparaison anglais chinois

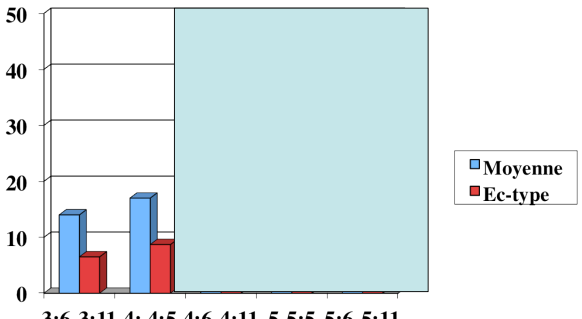


Évolution de la chaîne verbale

	Stable et conventionnelle	Stable mais non conventionnelle	Ni stable ni conventionnelle
1	Un deux trois	Quatre six huit neuf	Quatorze treize cinq
2	Un deux trois	Quatre six huit neuf	Douze quinze treize
3	Un deux trois	Quatre six huit neuf	Quatorze
4	Un deux trois	Quatre six huit neuf	Neuf

Évolution de la partie conventionnelle

- Dernier item atteint au comptage sans dénombrement



Évolution de la partie conventionnelle

	Classe moyenne	Classe défavorisée
4 ans	19,9	15,5

Les différences **verbales** associées aux classes sociales sont facilement éliminées par l'école

En résumé

- Dès l'entrée à l'EM, des différences importantes entre enfants concernant :
  - La discrimination des petits ensembles ;
  - La discrimination des « grandes » quantités ;
  - La connaissance des noms de nombres et des chiffres arabes ;
  - L'attitude et les émotions en relation avec les nombres ;

Ce qu'ils ne savent pas

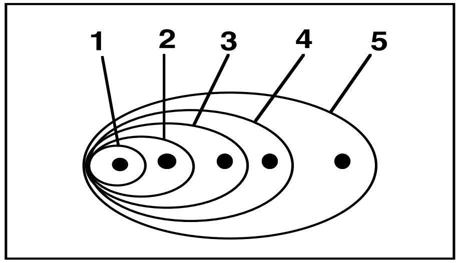
- À quoi servent les nombres et noms de nombres ; relation entre subitizing et comptage ;
- Dénombrer de manière précise ;
- Relier les noms de nombres (ou les chiffres arabes) aux quantités ;
- Comment fonctionne le système numérique ; compositions et décompositions ;
- Évoquer les quantités à partir du verbal ou des noms de nombres ;

Cycles 1 et 2

- Favoriser le passage **d'un traitement intuitif et approximatif** des **grandeurs et quantités**, disponible dès la naissance mais qui s'affine au fil du temps, **à un traitement précis** et conforme aux contraintes culturelles de ces mêmes grandeurs et quantités dont on attend qu'il soit **en place à l'entrée à l'école élémentaire** ou en fin de CP ;
- **Facteurs** susceptibles d'influer sur ce passage ;

Logique numérique: but du Cycle 1

Le nombre comme ensemble de classes emboîtées et ordonnées



Emboîtement (2 inclus dans 3, etc.), abstraction du cardinal, itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1), égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 = entre 2 et 3), relation d'ordre.

Des propriétés

- La quantification est précise ;
- Cardinal peut s'obtenir par **correspondance terme à terme**, sans dénombrer ; indépendance par rapport aux caractéristiques perceptives ; compositions et décompositions ;
- Cardinal peut s'obtenir par **dénombrement** : correspondance entre noms de nombres (symboles) et entités ; itération de l'unité (4 c'est 3 et encore 1) ; égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 et 2 et 3) ;

Quelles sont les difficultés?

Comment s'établit la notion de cardinal? Comment les systèmes symboliques vont-ils rendre précis le dénombrement?

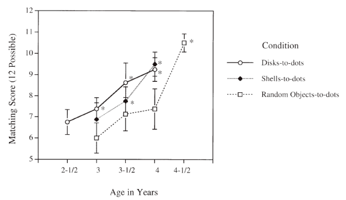
De la représentation analogique à la représentation verbale

- **Deux problèmes** :
  - **Catégorisation** : la cardinalité devrait être indépendante par rapport aux caractéristiques perceptives des collections (3 étoiles, 3 fourmis, 3 voitures) ;
  - **Le langage code la quantité par l'ordre** : 6 est plus grand que 5 puisque 6 vient après 5 ; les enfants doivent apprendre à évoquer la quantité à partir de la succession des mots de nombres ;

Cardinal et correspondance terme à terme

Acquisition lente associée à des expériences nombreuses et diverses

La notion de cardinal: abstraite



La reconnaissance de **l'équivalence numérique** (= le **cardinal**) de petites quantités (2, 3 et 4) est d'autant plus facile chez les plus jeunes (jusque vers 4 ans) que:

- Les entités se ressemblent ;
- La disposition spatiale est proche ;
- Les enfants connaissent la suite conventionnelle des noms de nombres ;

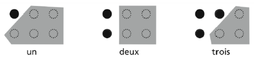
La correspondance Terme à Terme (CTT)

	Inférer le nombre	Inférer la correspondance
Pour n = 3 ou 4		
3 ans	.74	.71
4 ans	.93	.88
Total	.82	.84
Pour n = 6 ou 7		
3 ans	.66	.59
4 ans	.79	.88
Total	.72	.72

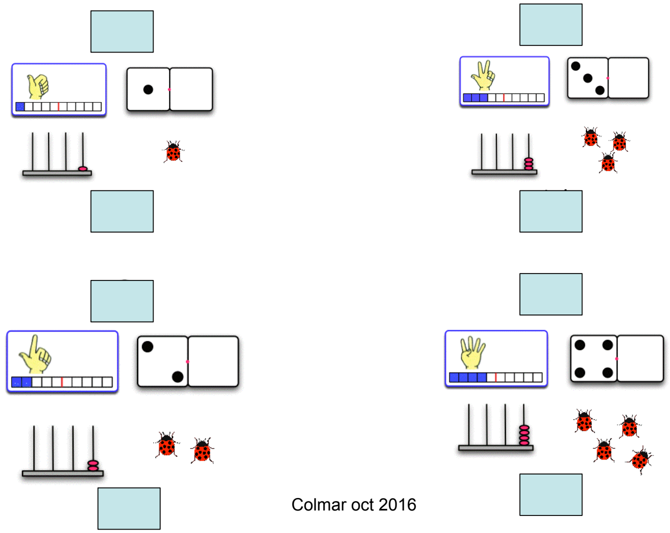
Dès 3 ans peuvent inférer la numérosité de 2 collections mises en CTT, et raisonner sur l'appariement de deux collections dénombrées. Toutefois, vrai avec petits nombres. Au delà de 4, labilité et inconsistances.

Que faire?

- **Nombreuses activités** de mise en correspondance avec des entités différentes en tailles, couleurs, fonctions, etc. ;
- Variations des **dispositions**, des regroupements ;
- **Collections témoins** de doigts (contribution à l'abstraction du cardinal) ; (3 fourmis -> 3 doigts ; 3 doigts -> 3 fourmis) ;



Différents codes analogiques



La relation aux codes symboliques

Encore plus lent et complexe

L'importance des codes

- Essayez de résoudre:
- XXXIV x XXIII
- CXXIX - XXXVIII
- Ce ne sont pas les quantités qui posent problème, mais **leur codage** et la **manipulation** des codes;
- Source principale de difficulté: le **code**; sa **signification**; sa **vitesse** d'accès (dans les 2 sens); sa **manipulation**;

La relativité de la dimension verbale

- En **Amazonie**: peuplades sans séquence étendue de noms de nombres : limitée à « un, deux, trois… » ;
- Flou des appariements entre noms de nombres et quantités associées: 1 systématiquement appliqué ; 2 le plus souvent aussi ; mais 3 renvoie parfois à deux, parfois à 3 ou à 5 ;
- Pourtant, capacité d'évaluation approximative (donc représentation analogique fonctionnelle) et correspondance terme à terme exacte ;
- **C'est la relation code quantité qui pose problème** ;

Comptage chez les 2-3 ans

- Imiter **l'alimentation d'animaux** (oiseaux, requins) auxquels l'E donne des entités diverses en quantité variant de 1 à 6 ; sans jamais évoquer de nombre ni de quantité ;
- 44 enfants de 2 à 3 ans, aucun ne compte au-delà de un; deux sous-groupes: ceux qui se focalisent (F) sur la quantité et les autres (A) ;
- Les enfants vont-ils utiliser le STO (exact jusqu'à 3) ou le SEA (diminution des réussites en fonction de la quantité) ;

Un constat

TYPES DE TACHES	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
-Reproduire un nombre donné d'objets	1	-	3	-	-	4	-	-
-Montrer autant de doigts que d'objets	-	1-2	-	3	-	4	-	-
-Montrer autant d'objets que de doigts	-	1-2	-	-	3	4	-	-
-Imiter un nombre de coups frappés	-	-	1	-	2	-	3	-
-Dire combien on a entendu de coups	-	-	-	-	1-2	3	-	4
-Dire combien d'objets sans compter	1	2	-	-	3	-	-	4
-Donner un certain nombre d'objets à 1, 2 ,3 personnes	1	2	-	-	3	-	-	4 à 10
-Répéter la suite des nombres	1 à 4	1 à 5	1 à 6	-	1à 7-8	1 à 10	-	-
-Dénombrement avec les doigts	-	-	-	-	2 à 6	7 à 10	-	-

Descœudres, 1921

La réussite à traiter 3 **dépend des tâches** à réaliser et de l'âge. Acquisitions limitées à des **situations** précises. Modularité des savoirs et savoir-faire.

Bilan

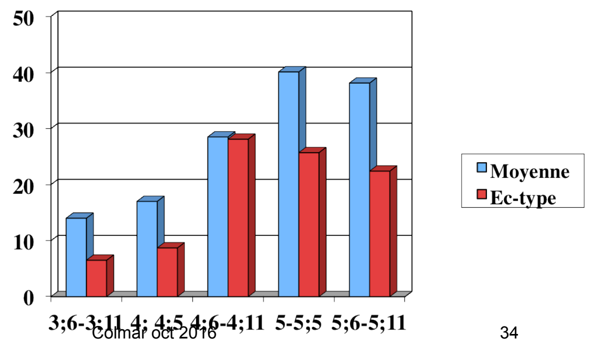
- Pour les jeunes enfants, le « nombre » n'est pas :
  - Indépendant des caractéristiques perceptives ;
  - Indépendant des situations de mise en œuvre ;

La chaîne verbale

- Les enfants apprennent très tôt et sans grand effort apparent, **la suite des noms de nombres** (= la **chaîne verbale** : un, deux, trois, etc..); la vitesse d'apprentissage dépend de la régularité du code verbal;
- La connaissance de la chaîne **ne garantit pas que les enfants sachent s'en servir** pour, par exemple, déterminer le successeur d'un nombre ou la plus grande de deux quantités ;
- Les enfants **ne généralisent pas** à l'ensemble des nombres les savoirs et savoir-faire qu'ils sont en mesure de mobiliser sur les petites quantités qu'ils maîtrisent: une fois parvenus à 4, ils ne sont pas capables de dire si 14 est plus grand que 13 alors même qu'ils réussissent pour 5 et 4;

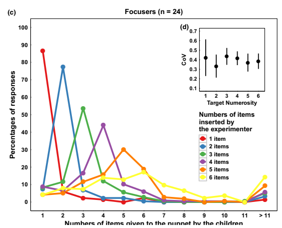
Évolution de la partie conventionnelle

- Dernier item atteint au comptage sans dénombrement

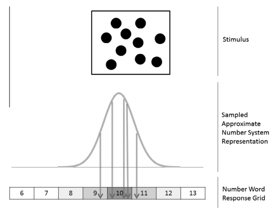


Plusieurs apprentissages

- Les enfants apprennent les noms des nombres un, deux et trois en les associant à des quantités ;
- Cette acquisition, lente, suit un ordre :
  - en premier « un » (vers 21/2 : sachant un) ;
  - puis 2 (vers 3 ou 31/2 : sachant deux) ;
  - puis 3 (vers 31/2 ou 4 : sachant trois) ;
- Cette acquisition est mise en évidence par, d'une part « Donne N », d'autre part «Combien y a-t-il sur une carte? » ;
- Peu de temps après être devenus « sachant trois ou quatre », ils découvrent le principe cardinal et la fonction de successeur (N, N+1, (N+1)+1…) ; rôle des interventions?



Que faire?



- Le problème est triple:
  - Raffiner les **capacités de comparaisons** des grandeurs et quantités ; établir **l'équivalence** des quantités ; **correspondances terme à terme** ;
  - Acquérir **un (ou des) système(s) symbolique(s)** (noms de nombres, chiffres arabes, ou autre) ;
  - **Associer les symboles aux quantités** dans les deux sens : cardinal (notion très abstraite) ; évocation et production automatiques ;

Associer les symboles aux quantités et utiliser les deux

Approximative
Évaluations,
comparaisons

SEA: Représentation analogique
des grandeurs (et quantités)

Représentation symbolique = CODE

Langage

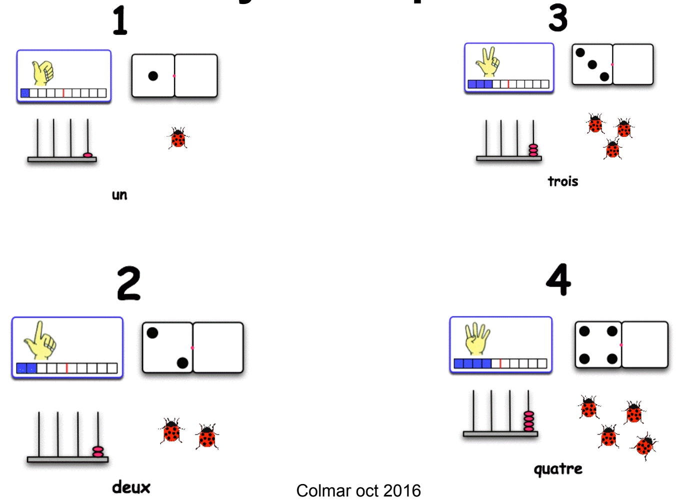
Chiffres arabes

Bouliers

Doigts

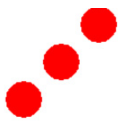
Encoches

Différents codes analogiques et symboliques

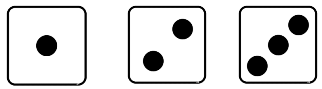


Appariement Mots-Chiffres-Quantités

Benoit, 2013



1	4	5
2	6	3



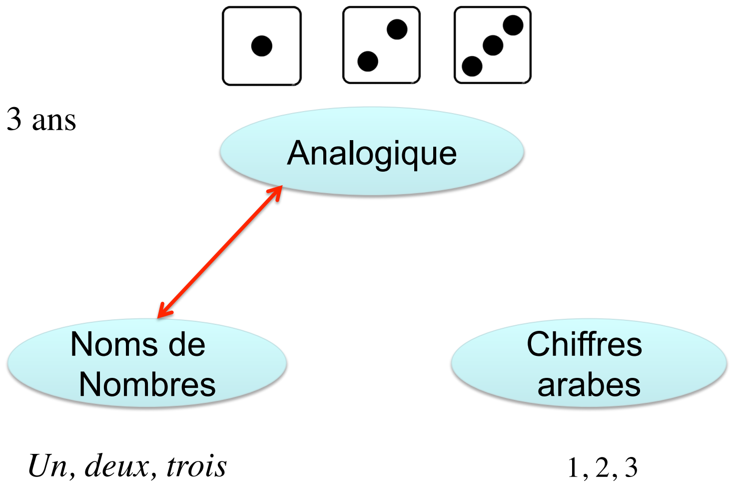
Analogique

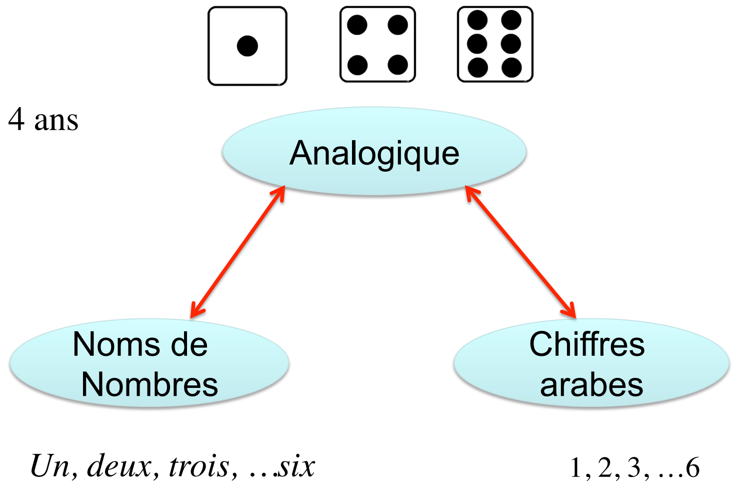
Noms de Nombres

Chiffres arabes

Un, deux, trois

1, 2, 3





Transcodage en passant par la quantité

Plusieurs activités

- Reconnaître et dénommer les quantités ;
- Passer de n à n + 1 (et à n – 1) ;
- Comparer et ordonner les quantités ;
- Associer des collections-témoins (dominos, doigts) aux quantités et aux symboles ;
- Dénombrer: dire combien il y a ; donner x ;
- Distinguer le comptage du dénombrement ;
- Composer et décomposer ;
- Résoudre des problèmes ;

Exploiter les petites quantités

De 1 à 3 ou 4 puis à 5 et 6 jusqu'à 10

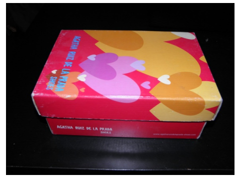
Plusieurs activités

- Chercher des entités dissimulées dans des boîtes opaques (non verbal) ; comparer des ensembles hétérogènes (non verbal) ;
- Trouver le résultat d'ajouts ou de retraits (non verbal) ; puis verbal ;
- Déterminer si la CTàT permet de savoir combien sans compter (il y a autant de n que de m et il y a n, combien de m?), verbal ;
- Passage du non verbal au verbal: grand problème ;

Mémoire et transformations
(non verbales)

On place 1 jeton (ou plus) dans une boîte opaque. On ajoute (ou on retire) 2, 3, 4 jetons **sans que l'enfant puisse voir le résultat**. On demande à l'enfant de produire lui-même le résultat avec ses propres jetons.





Mettre ensuite ou non en relation avec les symboles (1 + 4 = 5); étudier les stratégies;

Les tout-débuts

	Boîte réelle fermée	Boîte évoquée	**Présentation formelle**
Petits nombres < 3	83%	56%	15%
Grands nombres > 3	28%	20%	6%

Jusque vers 5 ans 1/2, réussite lorsque les quantités sont petites et associables à des représentations spatio-temporelles (évocation en mémoire). Aller **progressivement de quantités manipulées à des quantités évoquées puis à des symboles** ; des petites aux plus grandes quantités ;

Ajouter ou retirer (max de 2 à 5)
Présentation verbale

		numérosité			
Âge	Tâche	2	3	4	5
36	Addition	**.86**	**.54**	.33	.07
	Soustraction	**1.00**	**.71**	.38	.07
42	Addition	**.88**	**.66**	.25	.19
	Soustraction	**1.00**	**.72**	.40	.06
48	Addition	**.81**	**.66**	.19	.19
	Soustraction	**1.00**	**.78**	.42	.19

Très faibles performances au-delà de trois: résolution par évocation. Peu d'utilisation des doigts ou autres dispositifs.

Difficultés

- Percevoir les actions est plus facile que les évoquer à partir du langage ;
- Les noms de nombres sont des abstractions: beaucoup de temps avant de conduire à l'évocation des quantités précises ;
- Passer du comptage au cardinal ; et réciproquement (jeux de plateau) ; comptage et correspondance terme à terme ;

Mises en correspondance progressives

- Configurations aléatoires ou conventionnelles (collections témoins ; doigts) ;
- Mots de nombres; chiffres arabes ; ne pas les confondre (transcodage) ;
- Quantités et symboles (dans les deux sens: précision, rapidité) ;
- Élaboration progressive par n, n+1, n +1+1, etc.

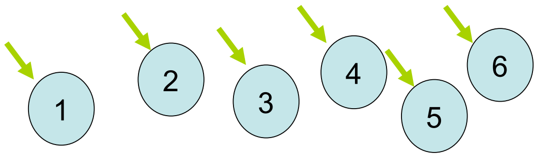
Le dénombrement

Suite verbale, pointage moteur et coordination

Le dénombrement

- Coordination de la mise en œuvre de **deux composantes, sources potentielles de difficultés** :
  - Composante **motrice** (pointage, mouvements des yeux, etc) ;
  - Composante **symbolique** (noms de nombres, chiffres arabes, formes signées) ;
  - Possible coût de cette **coordination**, qui s'ajouterait aux coûts de chacune des deux composantes ;
  - Quel impact chez les enfants TSL ou dyspraxiques? Trois sources de difficultés ;

Dénombrer : procédure canonique



–Stricte **correspondance terme à terme** entre désignation des éléments et items servant à les désigner ;

–**Ordre stable** des éléments servant à désigner ;

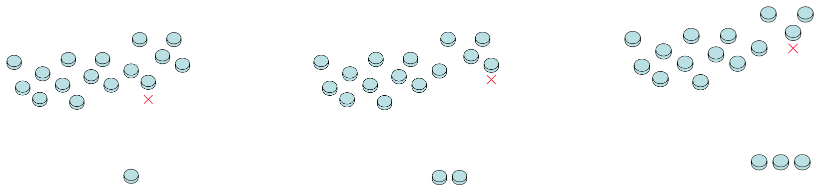
–Le **dernier** élément énoncé fournit la cardinalité ;

–**Abstraction**: aucun impact de l'homogénéité ou de l'hétérogénéité ;

–**Non pertinence de l'ordre** du traitement ;

Landerl et al., 2004

Dénombrer: cardinal



Éviter le comptage numérotage

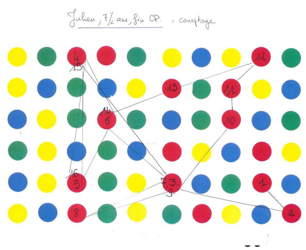
Performances en fin de GSM (70 mois) vers le CP

Principes	Pourcentages
Ordre stable (OS)	62.4
Correspondance T à T (CTT)	95.3
Cardinalité C	**65.7**
OS+CTT	59.1
OS+C	43.3
CTT+C	65.7
Les trois	44.2

Le dénombrement : diagnostic

- Différencier les erreurs de performances des troubles de la compétence *(Gallistel & Gelman 1983)* ;
- **Comparaison de performances dans trois conditions** : pointage de jetons sans dénombrement ; énonciation des noms de nombres; jugement du dénombrement (exact ou erroné) effectué par une marionnette ;
- Enfants TSL, dyspraxiques et contrôles appariés sur l'âge ;
- *Camos, Fayol, Lacert, Bardi & Laquière, 1998*

Difficultés d'attention: Julien, 7 ans : 16 au lieu de 15;



Activités avec nombres de plus en plus grands

- Reconnaître, dénommer, comparer et ordonner des collections; puis les symboles correspondants;
- Associer différentes représentations (livres à compter) ; utiliser des collections-témoins (doigts) ; **puis** des symboles ;
- Dénombrer (dire combien il y a) et donner x ; collections -> symboles ET symboles -> collections ;
- Composer et décomposer (un et encore un et encore un et encore un c'est quatre; deux et encore deux c'est quatre) ;
- Résoudre des problèmes : en actions; à partir de petites histoires; à partir de situations ; sous format abstrait; passage progressif au verbal ;

Cycle 2

Des actions aux représentations d'actions puis aux traitements symboliques

Les relations code quantités R11

- Questions relatives **aux codes de la numération orale puis écrite**, à leurs propriétés et aux apprentissages correspondants ;
- L'apprentissage du code indo-arabe au-delà de la dizaine : **la notation dite de position** et ses difficultés ; notation qui correspond à des concepts nouveaux que les élèves doivent acquérir et qui pourraient contribuer à favoriser cette acquisition ;

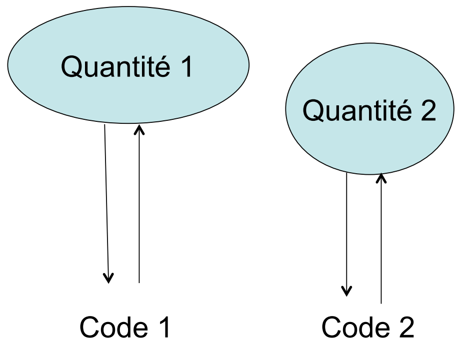
Les opérations

- **Utiliser et combiner des symboles suivant des règles** (addition, soustraction, multiplication, etc.) plutôt que de réaliser des transformations (ajouter, enlever, partager) portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles ; R15 R16
- **Apprendre que la manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application des transformations** ;
- Découvrir la « liberté » relative de manipulation des symboles: **propriétés des opérations** (inversion, commutativité, etc.) ;

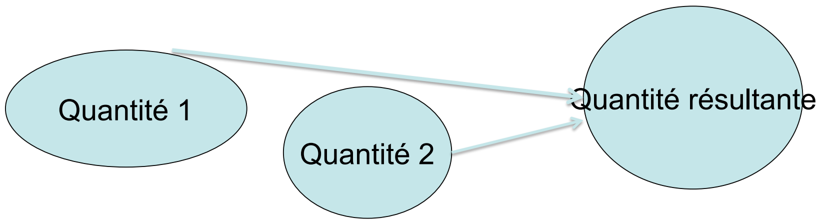
Les traitements symboliques

- Le traitement symbolique des opérations nécessite :
- La compréhension et l'automatisation des relations entre symbole et cardinal (dans les deux sens) ;
- La compréhension du fonctionnement des représentations symboliques : verbales et indo-arabes (succession, itération de l'unité) ; relations ordinales (ligne numérique) ;

Les quantités et leur codage symbolique

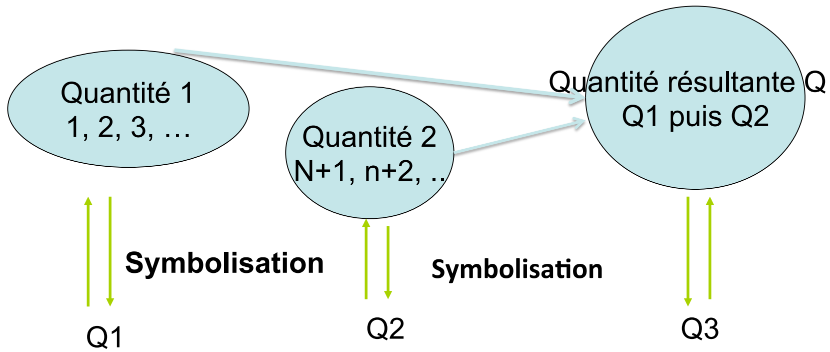


Les transformations



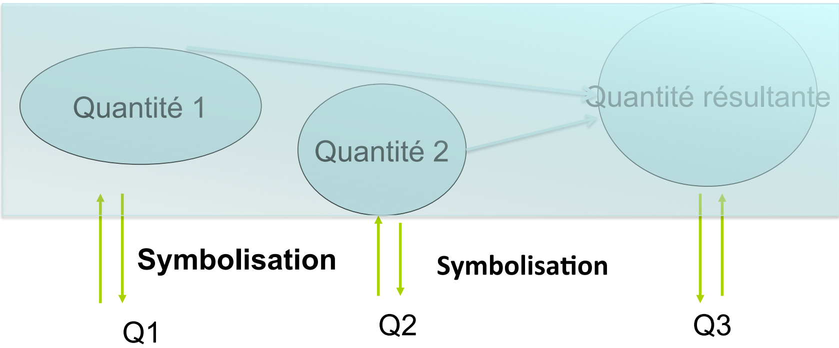
La réunion (ou l'extraction) physique portant sur deux quantités (ou plus) aboutit à une nouvelle quantité, résultante. **Intuition primitive très précoce**.

Des transformations vers les opérations



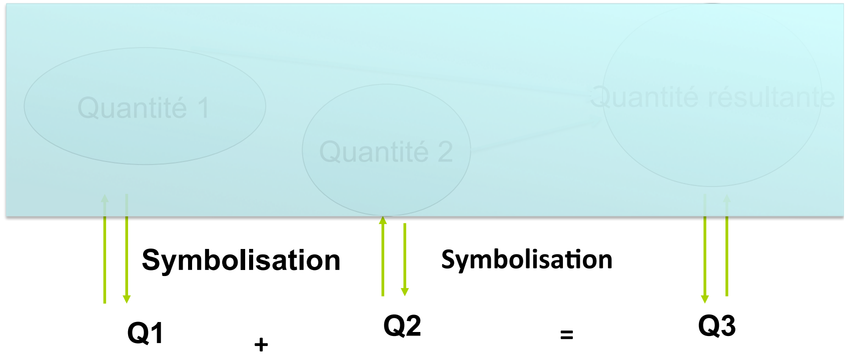
L'appariement de chaque ensemble avec un symbole permet d'aboutir à **un nombre pour chaque quantité** (Q1, Q2 et Q3). L'aboutissement est équivalent au parcours de Q1 puis de Q2 en un même dénombrement.

Des transformations vers les opérations



Passage de Q1 puis Q2 à Q1 +1, +2, +3….. Jusqu'à Q3.
Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n)

Les opérations



Puis commencer par le plus grand des deux (Min m, n) Q1 + Q2 = Q2 + Q1 = Q3
Compositions et décompositions ; faits ;
Commutativité de l'addition, non de la soustraction

Entraînement informatisé

- 147 enfants de CP répartis aléatoirement en groupes entraînés (analogique ou symbolique) ou non;
- 10 sessions de 30 mn pendant 4 semaines; le programme adapte automatiquement la difficulté à la performance de l'élève;
- Les groupes entraînés font mieux que le groupe contrôle ; c'est l'entraînement « approximatif » qui améliore le plus les performances ;

L'apprentissage du code indo-arabe et le transcodage

Une difficulté particulièrement importante en francophonie

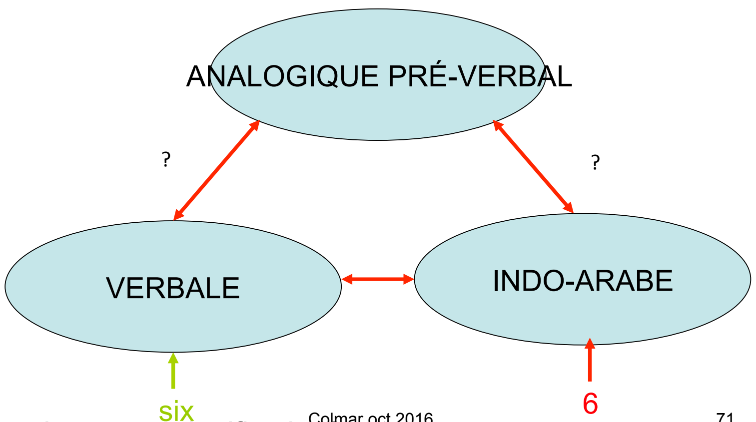
Propriétés du code indo-arabe

- Lexique restreint (10 éléments dont zéro);
- **Notation positionnelle** (la valeur dépend de la position: 1; 10; 100; 1000);
- Erreurs de position : 201 vs 210; importantes **difficultés en 2ème et 3ème primaires**;
- Problèmes de **transcodage oral -> écrit :** erreurs spécifiques en Français (6012 pour soixante douze; 42016 pour quatre vingt seize) ; non transparence de la base dix;
- Utiliser longtemps du matériel pour manipuler en base 10 ;

En français

- Suite verbale des noms de nombres **irrégulière** : base dix transparente seulement à partir de *dix-sept* ; pas ou peu transparente avec *vingt, trente, quarante* ; puis irrégularités avec *soixante-dix, quatre-vingt* et *quatre-vingt-dix* ;
- Complique l'apprentissage de la numération indo-arabe car base 10 systématique ;

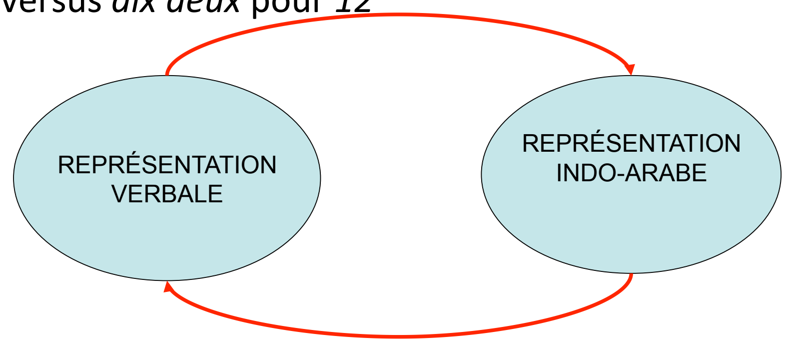
Traitements des chiffres et mots de nombres
Transcodage



Transiter par la signification?

Représentations verbale et indo-arabe

Difficulté dépend de la **facilité d'appariement** entre code verbal et code indo-arabe: *douze* versus *dix deux* pour *12*



La représentation indo-arabe

(Seron & Fayol, 1994 ; Fayol & Seron, 2005, 2015)

- **Erreurs initiales de transcodage;**
- Comparaison Wallon/Français :
  Ecriture sous dictée en Deuxième primaire (CE1)
- Quatre vingt deux -> 4202 ou 802
  Soixante douze -> 6012
  Quatre vingt dix sept -> 42017
- Erreurs de même type chez des adolescents en grande difficulté d'apprentissage ;

Transcodage en fin de CE1

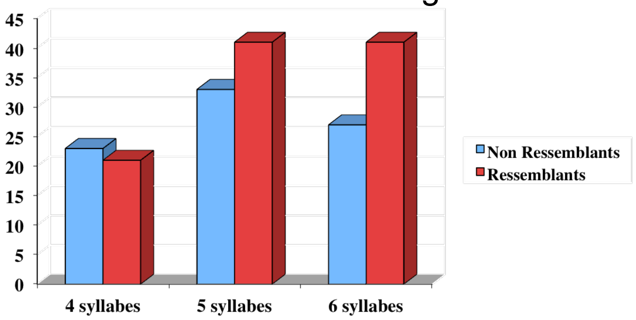
Jarlegan et al., 1996

- **Structure**: D (30, 60) DC (70, 90), DU (41, 57), DCU (76, 83), CDU (312, 749), CDCU (481, 293) MCDU (1352) ;
- **Épreuves** : RC, LR, CR, LC, RL, CL (R Représentations avec cubes, barres de 10 et plaques de cent ; L : écriture en lettres des noms de nombres ; C : écriture en chiffres ;
- Au total 192 items (48 par condition) ;

Résultats du transcodage en CE2

Fayol & Seron, 2015

Mémoire à court terme : longueur et sonorité

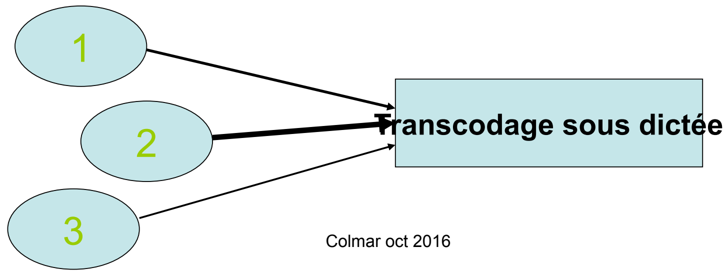


Exemples de nombres :
NR 4S : 3029, 1203; R 4S: 1117, 1516;
NR 5S : 9401, 2045; R 5S : 6057, 7160;
NR 6S : 1842, 8091; R 6S : 3084, 5617;

Réussir le transcodage

Perros et al., 1998

- Maintenir la configuration verbale en mémoire (1) ;
- Déterminer le nombre de chiffres (frame) (2) ;
- Capacité de contrôle ultérieur (3) ;
- Application : en CE1 : passage de 126 à 4 erreurs en quelques jours ;

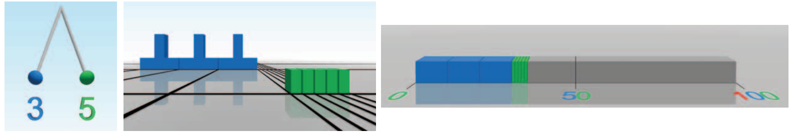


Un cumul de difficultés

- Les **irrégularités de l'oral** rendent complexe l'apprentissage du code arabe ; erreurs consécutives à la mémoire et aux irrégularités ; rôle de la répétition ;
- Importance des **relations entre base 10 et codage arabe** : numération de position ; risques de traitements sans compréhension ;
- Intérêt **d'associer des manipulations de matériel ad hoc avec le codage arabe** ;

Trois modalités de représentation

R7



Graphique du nombre (gauche); réglettes de couleur (milieu); ligne numérique (droite)
Käser Fr in Psy 2013 N26 Programme Calcularis

La ligne numérique

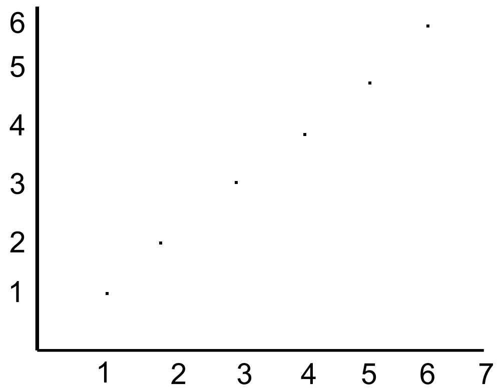
Importance de l'unité

La ligne numérique comme outil d'évaluation de la représentation

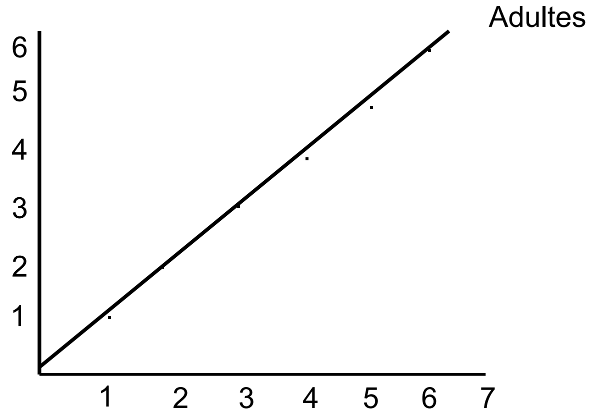
0______________________________100

28 ?

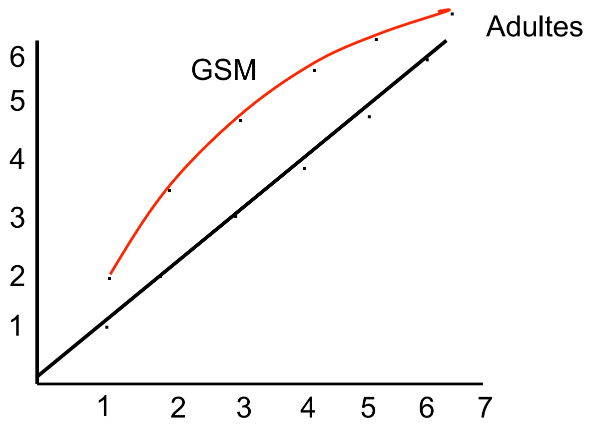
Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Évolution des estimations

Siegler, R.S., & Booth, J. L. (2004); Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006)

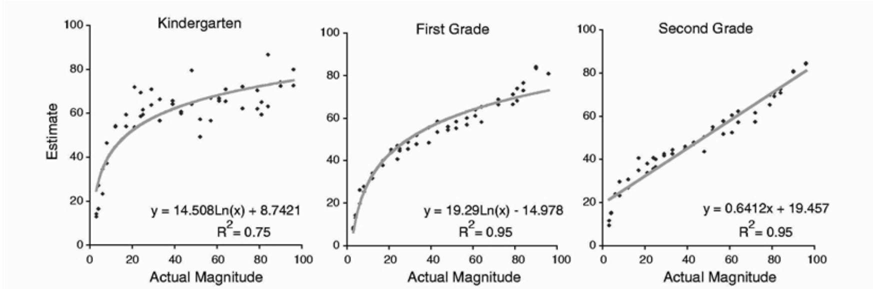
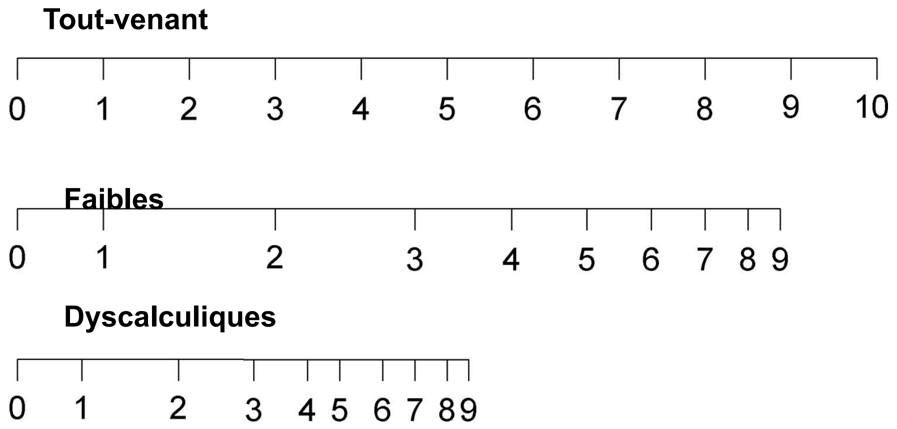


Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.

Évolution de la mise en relation entre système symbolique verbal (quinze…) et représentation spatiale: du logarithmique au linéaire.

Patrons de performance



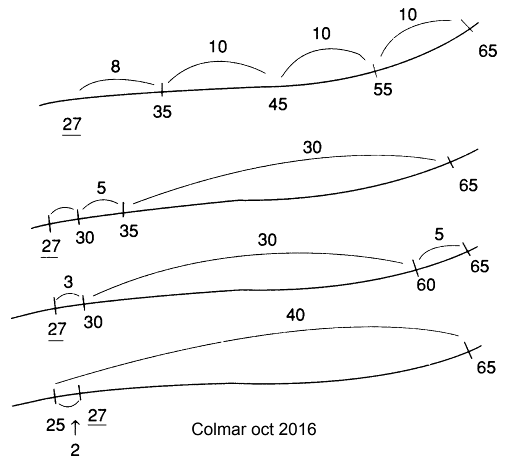
Geary, 2011

Évolution

- Sur une ligne allant de 0 à 10, le pourcentage d'erreur (PAE) de 14% en fin de CP à 4% en CE2 ;
- De 0 à 100, le PAE passe de 19% en fin de CP à 8% en fin de CE2;
- Sur une ligne allant de 0 à 1000, le PAE passe de 21% en CE1 à 14% en CM1 puis à 7% en Sixième et 1% chez l'adulte ;
- Les erreurs sont beaucoup plus importantes avec les fractions (ligne de 0 à 1 ou 0 à 2) et les décimaux ;
- **Relations avec la performance en mathématiques** ; meilleur prédicteur des performances arithmétiques en CP et CE1 ; au delà évaluation de l'ordre ;

Utilisations de la ligne numérique

Soustraction 65 - 38



Beishuizen, 2004

Unifier conceptuellement la notion de nombre

- La ligne numérique : pour les **entiers naturels** ;
- Pour les **fractions** : bornes (0 – 1 à 0 – 2 par exemple) ;
- Fortement liée aux performances arithmétiques (opérations, problèmes) ;
- Prédit les réussites ultérieures (au-delà du CM1) ;
- **Entraînable** avec effets sur les performances arithmétiques ;

Les opérations

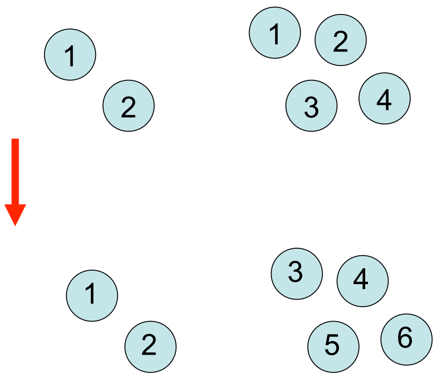
Calcul mental versus opérations posées

Les opérations : 4 dimensions

- Des **situations** : les premières « opérations » sont très dépendantes des situations présentées ; indépendance croissante ;
- Des **procédures** : découvertes par les enfants puis enseignées ; algorithmes ;
- Des **faits** (dit arithmétiques: 3 + 4 -> 7) ;
- Des **propriétés** (commutativité, inversion, etc.) ; R16

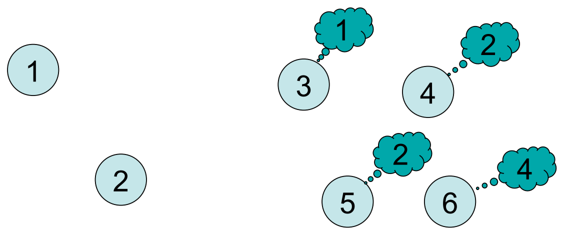
Le tout-début : compter tout

Compter tout (2 puis 4) : agir (réunir) puis dénombrer le total (6).



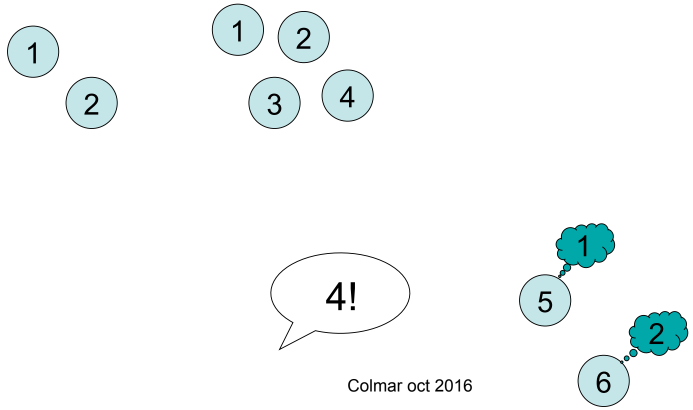
Puis : compter à partir du premier fourni

Avec objets présents: action dépendante de la présentation



Puis : compter à partir du plus grand

Début des opérations : l'ordre de traitement **s'autonomise** par rapport à l'ordre de présentation : **a + b = b + a**



Evolution des procédures de calcul

Diversité des procédures de résolution d'opérations simples

- –**Objets** eux-mêmes; tout compter ;
- –**Substituts analogiques** des objets (doigts) ;
- –**Compter mentalement**, en commençant par le premier fourni (3) puis par le plus grand (4) (min m,n) découverte de la **commutativité ;**
- –**Retrouver directement** en mémoire verbale le résultat d'une association (3 et 4 -> 7) ;
- –**Décomposer** le problème à résoudre ; 7 + 5 -> 7 + 3 + 2

Les performances varient en fonction : de la taille des nombres ; de la modalité de présentation ; de la situation décrite ;

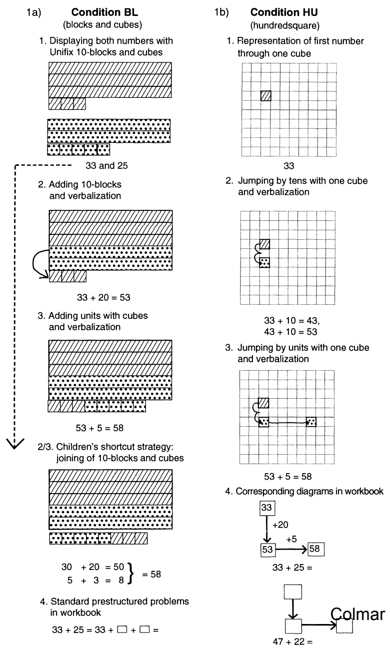
Stratégies 1010 ou N10: additions et soustractions R14 – R18

Mental Strategies 1010 and N10 for Addition Up to 100: No-Carry and Carry Problems

No-carry problem: 46 + 23	Carry problem: 38 + 16
1010: $46 < \begin{matrix} 40 + 20 = 60 \\ 6 + 3 = 9 \end{matrix} \} 60 + 9 = 69$	1010: $38 < \begin{matrix} 30 + 10 = 40 \\ 8 + 6 = 14 \end{matrix} \} 40 + 10 = 50, 50 + 4 = 54$
N10: 46 + 20 = 66, 66 + 3 = 69	N10: 38 + 10 = 48, 48 + 2 + 4 = 54

Mental Strategies 1010 and N10 for Subtraction up to 100: No-Carry and Carry Problems

No-carry problem: 58 – 26	Carry problem: 42 – 15
1010: $58 < \begin{matrix} 50 - 20 = 30 \\ 8 - 6 = 2 \end{matrix} \} 30 + 2 = 32$	1010: (carrying afterward) $42 < \begin{matrix} 40 - 10 = 30 \rightarrow 20 \\ 2 - 5 = ? \rightarrow 12 - 5 = 7 \end{matrix} \} 20 + 7 = 27$
	1010: (carrying before) $42 < \begin{matrix} 30 - 10 = 20 \\ 12 - 5 = 7 \end{matrix} \} 20 + 7 = 27$
	10 – s: (units stepwise) $42 < \begin{matrix} 40 - 10 = 30 \\ 2 - 5 = ? \end{matrix} \} 30 + 2 = 32, 32 - 2 - 3 = 27$
N10: 58 – 20 = 38, 38 – 6 = 32	N10: 42 – 10 = 32, 32 – 2 – 3 = 27



Comparaison de la technique des **blocs** et de celle du déplacement sur le carré de cent

Types d'erreurs commises

Error types	1010 strategy	f	N10 strategy	f
Wrong number facts (units)	38 + 16 = 40 + 13 (8 + 6) = 53	5	42 – 15 = 32 – 5 = 28	8
Wrong number sequence (tens)	58 – 34 = 50 – 30 = 10 + 4 = 14	4	46 + 23 = 76 (46 + 20) + 3 = 79	7
Forgetting number parts	46 + 23 = 60 + 3 = 63	6	26 – 12 = 26 – 10 = 16	2
Not carrying tens	42 – 15 = 30 + 7 (12 – 5) = 37	10	—	—
Wrongly combining steps	58 – 34 = 20 – 12 (8 + 4) = 8	12	—	—
Wrongly subtracting-all	26 – 12 = 10 – 6 – 2 = 2	15	58 – 34 = 28 – 8 = 20 – 4 = 16	3
Smaller-from-larger bug	42 – 15 = 30 + 3 (5 – 2) = 33	17	42 – 15 = 32 – 5 (5 – 2) = 33	—
Wrong 10s-adaptation	42 – 15 = 30 + 5 = 35 – 2 = 33	6	—	—
Other		3		2
	Total =	78	Total =	24
	Mean =	1.95	Mean =	0.71

Importance des connaissances

- Les **faits** (4 + 5 -> 9) et les savoir-faire (**procédures**) sont indispensables pour réussir les opérations complexes, mentales ou posées ; ces dernières **à la fois les mobilisent et les consolident** ;
- Importance des exercices : **systématiques, brefs, quotidiens** ;
- Toute la scolarité ; jeux ou opérations de plus en plus complexes et rapides?

Les opérations Connaissances conceptuelles

Une question peu abordée

Comment résolvez-vous?

- 147 x 236 / 236? Inversion x et /
- 274 x 418 / 312? Contrôle ou Standard
- 523 x 480 / 240? Associativité (axb)/c = ax(b/c)

Quelques propriétés

- La **commutativité** de l'addition et de la multiplication : 3+4 = 4+3; 4x5=5x4 mais pas de la soustraction ou de la division ;
- La **relation inverse** entre addition et soustraction : a+b=c -> c-a=?; idem entre multiplication et division ;
- **L'associativité**: entre addition et soustraction (a+b)-c = a+(b-c) mais pas entre soustraction et multiplication (a-b)xc diffère de a- (bxc), etc.
- Peu de tests, peu d'activités…

Des questions

- La possibilité d'utiliser l'inversion (a+b-b) pour résoudre une opération complexe, par comparaison avec une opération standard (a+b-c) se traduit-elle par une meilleure réussite, plus rapide et par l'explication de cette utilisation?
- Même question pour l'associativité: calculer a+b-c en effectuant parfois b-c puis a+(b-c) plutôt que a=b suivi de (a +b)-c ;

Connaissances conceptuelles
L'inversion

- La possibilité d'utiliser l'inversion **(a+b-b)** pour résoudre une opération complexe (a + 1 – 1; puis a + 2 – 2), par **comparaison** avec une opération standard **(a+a-c)** (a + a – 1; a + a – 2) se traduit-elle par une meilleure réussite, plus rapide et par l'explication verbale de cette utilisation?
- Avec des briques en plastique combinables ; enfants de 5 ans et demi ; pas de généralisation ;

L'inversion potentielle est-elle utilisée?

	Concrète identique	Concrète Différente	Invisible identique	Invisible Différente	Verbaux	Abstrait
a + b - b	2,4	1,55	1,65	1,2	1,55	1,4
Contrôle	0,3	0,4	0,5	0,2	0,4	0,9

Concrète identique: briques ajoutées puis retirées au même endroit d'une réglette ;
Concrète différente: briques ajoutées et retirées à des endroits différents de la réglette ;
Invisible : l'enfant doit imaginer, pas de matériel utilisé ;
Verbaux: Il y a 11 cadeaux sous l'arbre de Noël, on en apporte 5 nouveaux, puis Paul en enlève 5. Combien…

Bilan en CE1 et CM1

- **Inversion utilisée** par environ 50% des enfants, sans **aucune évolution entre CE1 et CM1** ;
- Pourtant, **tous les enfants la jugent pertinente et efficace**: passer d'une connaissance à un savoir faire ; entraîner?
- **Associativité** moins connue, jugée moins souvent pertinente et peu utilisée: scolariser?

Conclusion

- Une question **mal connue et peu explorée** ;
- Des performances assez précoces pour certaines propriétés : commutativité et inversion (addition/soustraction) ; des différences interindividuelles qui perdurent ;
- Des performances tardives pour d'autres (associativité) : que donnerait un enseignement?
- **Quelles incidences sur les apprentissages mathématiques ultérieurs**? Pas de données ;

POUR CONCLURE

Deux dimensions

Deux dimensions

- Une **dimension spécifiquement mathématique** ; poids le plus important dans le devenir des performances mathématiques ; très précocement impliquée ; améliorable précocement ; importance des progressions et des consolidations ;
- Des **dimensions cognitives générales** : le langage et les systèmes symboliques (leurs propriétés) ; la MT, presque toujours impliquée (différentes sous-dimensions) ; la vitesse ; l'attention ;

Dimension mathématique

- Intervenir **sur le sens du nombre, le dénombrement, la résolution des opérations** ; impact à court terme ; à long terme? Jusqu'où?
- Efficacité d'interventions en maternelle avec enfants défavorisés ; stabilité des résultats 8 semaines plus tard ;
- Efficacité d'interventions combinant opérations et stratégies ;
- Importance de **progressions** permettant de situer les niveaux de performances ;

Dimensions générales

- **Intervenir sur les capacités générales:** systèmes symboliques; MT; vitesse?; attention? Des effets?
- **Tenir compte des capacités générales** et de leurs faiblesses ; difficultés de langage (impact sur le transcodage et les opérations mentales ; les faits) ; difficultés spatiales ou praxiques (impact sur la ligne numérique, les calculs et l'aperception des quantités) ; la mémoire à court terme (calcul, faits) ;

Des questions

- Rôle de l'environnement socio-culturel; mal connu, peu évalué ; interventions?
- Rôle de l'enseignement dispensé ; peu étudié ;
- Rôle de l'anxiété, y compris chez les enseignants ; que faire?
- Et sans doute bien d'autres….

Merci pour votre attention

Pour en savoir plus

Michel Fayol (2015 rééd). *L'acquisition du nombre.* Paris: Presses Universitaires de France, QSJ

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr