Le calcul mental
Entre sens et technique

Denis Butlen, ESPE de Versailles, UCP, LDAR

Plan

- **I. La place du calcul et du calcul mental dans les programmes**
- **II. L'intelligence du calcul**
- **III. Les enjeux de l'enseignement du calcul mental**
- **IV. Des points de repère pour penser un enseignement de calcul mental**
  - ***Entre sens et technique***
    - un premier résultat portant sur la construction des connaissances numériques
      - Le paradoxe de l'automatisme
      - Installer les pré-requis nécessaires
    - un second résultat portant sur la résolution de problèmes
    - Proposer des cheminements cognitifs différents
  - ***Des exemples d'activités***

I. La place du calcul

4 formes de calcul

- 4 formes de calcul
  - Le calcul mental
  - Le calcul en ligne
  - Le calcul posé
  - Le calcul instrumenté
- Absence de hiérarchie mais une place particulière accordée au calcul mental dans les programmes pour plusieurs raisons dont notamment pour prendre en compte
  - des résultats de la recherche: l'importance accordée dans la construction du nombre
    - à l'estimation
    - aux compositions/décompositions des nombres (ACE, Tempier, etc.)
  - Les résultats des évaluations nationales et internationales

La prise en compte des évaluations

Dépasser les diagnostics pour favoriser les apprentissages

Les acquis des élèves en fin d'école primaire

Rapport de J. F. Chesné et J.P. Fischer à la conférence de consensus sur le nombre et calcul

Quelques éléments d'analyse globale

L'éducation prioritaire

Quelques éléments d'analyse globale

- Les performances moyennes des élèves de l'éducation prioritaire comparativement aux autres sont systématiquement inférieures à celles de leurs pairs de l'éducation non prioritaire :
  - leurs scores moyens sur 100 sont inférieurs en moyenne de 8 (resp. 10) points à ceux de leurs pairs de CE2 (resp. 6e)
- CEDRE 2011 : 40% des élèves ont des connaissances peut être trop fragiles pour suivre correctement en 6e

Des éléments de diagnostic

Un déficit de performances qui interroge et qui pose la question de l’intérêt des différentes formes de calcul

Les tables de multiplication, la multiplication

Evaluation		Durée	3 calculs : 2 fois 3, 5 et 4*	3 calculs : 2 fois 7, 6 et 9*	3 calculs : 5 fois 3,5 et 2*	3 calculs : 5 fois 8, 10 et 7*	3 calculs**: 10 fois 2, 5 et 10*
Niveau	**Année**						
Début CE2	2005	2s	69,9	62,3	40,6	23,3	54,4
	2006	2s	70,0	63,4	39,7	23,0	53,0
Début 6e	**Calculs**		**6 fois 8**	**9 fois 9**	**5 × ?=35**	**9 × ?=27**	**8 × ?=56**
	2005	2s	69,4	87,8	81,4	75,0	54,4
	2006	2s	68,3	88,9	82,3	75,5	53,4
	2008	2s	71,4	90,7	83,5	76,9	56,5

Les tables de multiplication, la multiplication

- A peine plus d'un élève sur deux de 6e produit une réponse juste (connaissance déclarative) au produit plus complexe : 8 x ? = 56
- La multiplication posée 64 x 39 n'est résolue (Ev. Nat. 2001) que par 53,8% des élèves
- On note également une baisse de performances dans la maîtrise des opérations posées (addition comme multiplication)

L’enseignement des décimaux et des fractions

Tâche	ÉN CM2	ÉN 6e	Expérimentations
$11{,}39 \times 10$	67,1 % (2012)		
$7{,}14 \times 100$	65,1 % (2007) 64,5 % (1999)		37,9 % (PRE 2014) 37,4 % (PACEM 2011)
$3{,}256 \times 1000$	63,9 % (2012)		
$35{,}2 \times 100$		31,6 % (2008) 47,3 % (2001) 59,3 % (1994)	
$3{,}72 \times 1000$			31,8 % (PRE 2014) 29,8 % (PACEM 2011)
37 : 10*		41,6 % (2003) 56,0 % (2002)	
67 : 100			27,8 % (PACEM 2011)
16,2 : 10			36,4 % (PRE 2014) 28,5 % (PACEM 2011)

* : ce calcul était donné oralement.

Addition, soustraction : calculs mentaux

- **Tableau 1 – Addition et soustraction : calculs mentaux**
- Tache EN 6e Expérimentations
- **5,2 + 2,8 35,2 % (PRE 2014**)
- 5,2 + 13 + 2,8 41,2 % (PACEM 2011)
- **38 - 1,5 31,0 % (PRE 2014)**
- **29,8 % (PACEM 2011)**
- 1,7 + 2,3* 61,3 % (2003)
- 64,0 % (2002)
- ** : ce calcul, au contraire des trois premiers écrits en lignes, était donné oralement*.
- environ 80 % des élèves en fin de CM2 savent effectuer une addition ou une soustraction posée, les performances sont nettement plus faibles pour les décimaux

Multiplication : calculs mentaux

- **Tableau 3 – Multiplication : calculs mentaux**
- Tache EN CM2 Expérimentations
- **1,5 *x 4* *54,0 % (2010)* *65,5 % (PRE 2014)***

  70,3 % (PACEM 2011)
- **8,3 *x5* *54,6 % (2011)* *45,1 % (PRE 2014)***)

  34,6 % (PACEM 2011)
- **62 x *0,5* *17,5 % (PACEM 2011)***

Les nombres décimaux

- À l'entrée en 6e moins d'un élève sur deux réussit à passer d'une écriture décimale d'un nombre décimal à une de ses écritures fractionnaires
- Des notions qui reste difficile à construire (régularité internationale):
  - la comparaison de deux nombres décimaux
  - Situer un nombre sur la droite numérique
  - Multiplication et division par 10, 100, 1000
  - Les opérations sur les décimaux :

II. L’intelligence du calcul

L’enjeu de l’enseignement du calcul aujourd’hui

le point de vue du citoyen

- Une mission de l'école primaire : outiller le futur citoyen pour
  - faire face à des situations plus ou moins inédites
  - Prendre des initiatives
  - Improviser et mobiliser plus ou moins directement des connaissances mathématiques si besoin et donc de reconnaître les conditions de ce réinvestissent
- le calcul prend toute sa place dans la réalisation de cet objectif
  - Si on on a peu ou moins d'occasions de calculer dans la vie courante (les machines, l'étiquetage nous donnent accès directement au résultat)
  - Par contre savoir évaluer un ordre de grandeur peut s'avérer très utile

le calcul pour les mathématiques

- Le calcul n'est pas seulement un outil au service des mathématiques, il contribue lui-même à développer des concepts mathématiques
- Derrière les différentes formes de calcul, dans les pratiques les plus routinières, se manifeste une intelligence, qu'il s'agisse :
  - d'élaborer des procédures de calcul
  - d'en automatiser certaines
  - de les raffiner et de les prolonger
  - de les hiérarchiser en fonction du calcul à effectuer
  - de les contrôler
- Calcul et raisonnement sont dialectiquement liés
  - Tout calcul sollicite du raisonnement
  - Même automatisé, le calcul supporte le raisonnement
- Nous allons dans la suite de cet exposé présenter des exemples illustrant cet enjeu en nous centrant sur le calcul mental

III. Les enjeux de l'enseignement du calcul mental

Enjeux mathématiques et enjeux plus généraux

UN EXEMPLE DE CALCUL
32 x 25

Des procédures qui ne se valent pas

- Des procédures diverses que l'on peut hiérarchiser en terme d'efficacité
- Une mobilisation
    - qui dépend de la disponibilité des connaissances numériques des élèves
    - qui est le résultat d'un compromis entre la qualité des connaissances mobilisées et le coût en calcul et en mémoire
- Qui n'implique pas les mêmes apprentissages

La simulation du calcul posé

- A un moment ou à un autre du calcul, le sujet peut être amené à « poser un calcul dans sa tête »
- Calcul de la multiplication « posée dans la tête » (l'algorithme écrit)

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{\times\ 25} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \underline{\times\ 32} \end{array}$$

Les procédures mobilisant des décompositions additives

- *Procédure canonique* : utilisant la distributivité « simple » de la multiplication sur l'addition
  – 32 x 25 = 32 x 20 + 32 x 5 = 640 + 160 = 800
  – 25 x 32 = 25 x 30 + 25 x 2 = 750 + 50 = 800
- *Calcul utilisant la distributivité « complexe »* de la multiplication sur l'addition

32 x 25 = (30 + 2) x (20 + 5)

32 x 25 = 30 x 20 + 30 x 5 + 2 x 20 + 2 x 5

32 x 25 = 600 + 150 + 40 + 10 = 800

Les procédures mobilisant des décompositions multiplicatives

- Les procédures mobilisant des décompositions multiplicatives

  32 x 25 = 32 x 100 : 4 = 3200 : 4 = 800

  32 x 25 = 32 x 100 x 1/ 4 = 3200 x 1/ 4 = 800

  32 x 25 = 8 x 4 x 25 = 8 x 100 = 800

- Ou bien (plus rarement encore) :
  - 32 x 25 = 32 x 50/2 =(32 x 5 x 10)/2 = 160x10/2 = 1600/2 = 800
  - 32 x 25 = 16 x 50 = 8 x 100

Les enjeux du calcul mental

- Une hiérarchie de procédures basée sur des compromis entre qualité des connaissances mobilisées et coût en traitement du calcul (charge en mémoire et opérations mobilisées)
- Quels sont les enjeux de cette activité ?
  - *Enjeux mathématique*
    - Effectuer le calcul
    - Mobiliser les connaissances nécessaires pour réduire le coût en calcul et mémoire, s'adapter au calcul (mettre à distance certains automatismes)
    - Appréhender (en quelques secondes) l'enjeu de la situation en terme d'apprentissage et pas seulement en terme d'action
    - Fréquenter les propriétés des nombres et des opérations, accroître le domaine des connaissances disponibles (connaissances et procédures élémentaires automatisées)
  - *Enjeux plus globaux* :
    - entre implicite et explicite : percevoir le but caché d'une activité
    - Faire l'expérience de la réussite

IV. Des points de repères pour enseigner le calcul mental

IV.a. Connaissances sur les nombres et techniques de calcul

Des constructions étroitement liées

Installer les connaissances nécessaires

Un premier résultat de recherche

Une premier principe à prendre en compte

Un premier constat : le paradoxe de l'automatisme

Un premier constat

Le paradoxe de l’automatisme

Deux dynamiques possibles

- Un enseignement du calcul mental peu pensé peut conduire à l'existence de :
- Deux dynamiques qui peuvent coexister dans une même classe quand on enseigne régulièrement le calcul mental →
  - Une dynamique positive : Des prérequis sur les nombres et les opérations —> des connaissances disponibles —> mobilisation de procédures adaptées —> exploration des nombres et des propriétés —> des connaissances plus riches, plus disponibles —> une plus grande adaptabilité
  - Une dynamique négative : un manque de prérequis sur les nombres et les opérations —> des connaissances peu disponibles —> mobilisation de procédures sûres (automatisées) mais peu économiques —> peu ou pas d'exploration des nombres et des propriétés —> un déficit de connaissances disponibles —> une plus faible adaptabilité

Le paradoxe de l ’automatisme

- ***Ainsi*** une installation suffisante de
  - faits numériques mémorisés
  - de modules élémentaires de calcul

  permet aux élèves de mobiliser des procédures plus adaptées, plus économiques et d ’échapper à l ’automatisme
- ***Un enseignement paradoxal*** : pour échapper à une posture consistant à se réfugier dans des automatismes, il faut disposer d’automatismes (faits numériques mémorisés et disponibles et procédures élémentaires)
- ***Pour cela***, il est nécessaire :
  - de faire appel à la mémoire (installer le fait numérique et les conditions de son rappel)
  - d ’institutionnaliser à la fois la procédure et son domaine d ’efficacité

Une conséquence : Installer et rendre disponibles les connaissances sur les nombres

Des pré requis indispensables

addition, soustraction

- trouver le complément d ’un nombre à 10 ou à la dizaine supérieure (exemple 3 + 7 = 10)
  - 3 + ? = 10 ; 7 + ? = 10
  - 3 pour aller à 10 ; 3 → 10 ; 7 pour aller à 10 ; etc.
  - 10 – 3 = 10 ; 10 – 7 = 10
  - ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines
- trouver le plus rapidement possible le résultat d ’addition en ligne : 27 + 15 + 4 + 3 +5
- décomposer additivement un nombre en nombre entier de dizaines et nombre d ’unités
- décomposer additivement un nombre pour se ramener à la dizaine inférieure, à la dizaine supérieure

Multiplication, division

- Tester le produit
  - 8 x 6 = ?　　8 x ? = 48　　? x 8 = 48　　? x ? = 48

  8 x 5 + ? = 8 x 6　8 x 6 - ? = 8 x 5　　8 x 3 + 8 x 3 = ? Etc

  8 x 3 x 2 = ?　　4 x 2 x 3 x 2 = ?　　2 x 2 x 2 x 3 x 2 = ?

  2 x 2 x 2 x 6
- Recherches de multiples et diviseurs
  - Multiples : 48 est-il multiple de 6 ?　48 est-il multiple de 8 ?　De quels nombres, 48 est-il multiple ?
  - Diviseurs : 6 est-il un diviseur de 48 ? 8 divise-t-il 48 ? Citer des diviseurs de 48

Multiplication, division

- <u>Quotients entiers</u>
  - 48 divisé par 6 ? 48 divisé par 8
  - Quel est le quotient de 48 par 6 ? Quel est le quotient de 48 par 8 ?
  - 48 : 6 = ? 48 : 8 = ?
  - 48 : ? = 6   48 : ? = 8
  - Quel est le reste de 48 divisé par 6
  - Quel est le reste de 49 divisé par 6 ?

Multiplication, division

- Décompositions multiplicatives
  - *Écris sous la forme d'un produit* : 30 48   24   12
  - *Trouver des décompositions multiplicatives d'un nombre égal à une puissance de 2* : 32   64   128
- Jeu du télégramme
- Multiplications, divisions par 10^n, “ la règle des zéros ”
- Diviser un nombre par 10, 100 , 1000, 10^n
- Multiplier par 5, diviser par 5 ; multiplier, diviser par 50
- Multiplier et diviser par 25

IV.b. Un second résultat de recherche

Calcul mental et résolution de problèmes

Sens des opérations et maîtrise de techniques de calcul

Sens et techniques

- Un accès au sens par le biais de techniques
- Une première expérimentation : calcul mental et résolution de problèmes numériques (standard)
- résolution mentale de problèmes
- Un jeu sur les nombres
    - le problème de l 'autobus
    - du simple au compliqué

Un accès au sens par le biais de techniques

Maîtrise de techniques de calcul mental et reconnaissance des opérations

Réinvestissement et automatisation

- Le développement de l ’adaptabilité des élèves (manifestée lors des calculs) peut être réinvesti lors de la résolution de problèmes numériques
- une pratique régulière de calcul mental accélère le processus d’automatisation de la reconnaissance des opérations intervenant dans la résolution des problèmes

Une expérimentation

Résolution de problèmes standard

Des séances de calcul mental de deux types

- Des séances courtes et quotidiennes ayant deux objectifs :
  - entraîner au calcul (mémorisation, automatisation)
  - accroître les performances
- Des séances plus longues visant à enrichir l ’espace des procédures
  - explicitation de procédures
  - comparaison de procédures
  - institutionnalisations « souples »

Données numériques Opérations	2 données	3 données	une donnée inutile
Addition	état final *n°4* état initial *n°5*	état final *n°12* composée de transformations *n°16*	réunion *n°10* état initial *n°3*
Soustraction	complément *n°15* état initial *n°19*	état final *n°6* composée de transformations *n°7*	Distance *n°1* composée de transformations *n°21*
Multiplication	addition réitérée *n°1* Aire *n°8*	addition réitérée *n°20* Volume *n°13*	addition réitérée *n°2* Produit cartésien *n°24*
Division	Répartition (reste nul) *n°17* multiplication inverse (aire) *n°22*	répartition (avec reste) *n°9* division avec reste *n°14*	division (reste nul) *n°23* multiplication inverse *n°18*

Problèmes d'addition (énoncés)

- Problème 3 : (+,di, c) : Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : "j'ai exactement 32 ans de moins que toi !". Quel est l'âge de Maman ?
- Problème 4 : (+,2,s) : Hier, j'ai lu jusqu'à la page 134 de mon livre ; aujourd'hui, j'ai lu 27 pages ; à quelle page en suis-je maintenant ?
- Problème 5 : (+,2,c) : Pierre a perdu 15 billes à la récréation ; il lui en reste 20 ; combien avait-il de billes avant ?
- Problème 10 : (+,di, s) : Dans une ville, il y a 3 écoles ; dans la première, on compte 150 élèves ; dans la seconde, 58 élèves ; dans la troisième, 70 élèves ; combien y a-t-il d'élèves dans cette ville ?
- Problème 12 : (+,3,s) : Dans un autobus, il y a 36 personnes ; au premier arrêt, 3 personnes montent ; au second arrêt, 12 personnes montent ; combien y a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?
- Problème 16 : (+,3,c) : Au premier arrêt d'un autobus, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes montent ; au troisième arrêt, 8 personnes montent ; y a-t-il des personnes en plus ou en moins dans l'autobus quand il repart après le troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problèmes de soustraction (énoncés)

- Problème 6 : (-,3,s) : Dans un autobus, il y a 38 personnes ; au premier arrêt, 8 personnes descendent ; au second arrêt, 6 personnes descendent ; combien y a-t-il de personnes dans l'autobus quand il repart ?
- Problème 7 : (-,3,c) : Au premier arrêt d'un autobus, 12 personnes montent ; au second arrêt, 4 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes descendent ; y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? Combien en plus ou en moins ?
- Problème 11 : (-,di, s) : Jean part de Paris, doit passer par Melun et être à Fontainebleau à 10 heures ; la distance Paris-Fontainebleau est de 65 km et il y a 15 km de Melun à Fontainebleau ; quelle est la distance entre Paris et Melun ?
- Problème 15 : (-,2,s) : Dans un parking, il y a 100 places ; ce matin, 67 places sont occupées, combien reste-t-il de places libres ?
- Problème 19 : (-, 2, c) : J'ai maintenant 200 F dans ma tirelire ; on vient de me donner 50 F en cadeau ; combien avais-je avant ?
- Problème 21 : (-, di, c) : La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m ; au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent ; y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problèmes de multiplication (énoncés)

- Problème 1 : (x, 2,s) : Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 20 F la pelote ; calcule le montant de la dépense.
- Problème 2 : (x, di, s) : Une famille de 3 personnes séjourne pendant 6 jours à la résidence "des 3 îles" ; le tarif journalier de la pension est de 200 F par personne ; calcule le montant de la dépense.
- Problème 8 : (x,2,c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 34 carreaux sur la longueur et 20 carreaux sur la largeur ; combien ce quadrillage a-t-il de carreaux ?
- Problème 13 : (x,3,c) : Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur ; combien de morceaux de sucre y a-t-il dans la boîte ?
- Problème 20 : (x, 3, s) : Une famille de trois personnes part à la montagne pendant 6 jours ; le tarif journalier de la pension est de 200 F par personne ; quel est le montant de la dépense ?
- Problème 24 : (x, di , c) : Un restaurant propose un menu du jour à 70 F ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert ; combien de menus différents peut-on constituer ?

Problèmes de division (énoncés)

- Problème 9 : (division avec reste, s) : On doit répartir 50 pommes dans des corbeilles de 8 pommes chacune ; combien peut-on remplir de corbeilles ? Combien reste-t-il de pommes ?
- Problème 14 : (division avec reste, c) : Avec ses bottes de sept lieux, le petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km ; s'il parcourt 50 km, combien de pas va-t-il faire ?
- Problème 17 : (:, 2, s) : On répartit 126 œufs dans des boîtes de 6 ; combien de boîtes peut-on remplir ?
- Problème 18 : (:, di, c) : Pour Noël, Jean, qui dispose de 250 F, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paye 208 F ; quel est le prix d'un livre ?
- Problème 22 : (:, 2, c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout ; il y a 4 carreaux sur la largeur ; combien y a-t-il de carreaux sur la longueur ?
- Problème 23 : (:, di, s) : Un rallye cycliste comporte 105 km ; le départ est à 7 heures le matin ; les relais sont distants de 5 km ; chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais, et à l'arrivée ; combien de fois doit-il pointer ?

Des résultats

- Les élèves entraînés au calcul mental font moins d 'erreurs dans le choix de l 'opération quand le problème est un peu familier mais pas trop
- Le processus de reconnaissance de l 'opération est accéléré
- Sous certaines conditions (adaptabilité et automatisation), la technique est « créatrice de sens »

Les limites des ces premiers résultats

- Les élèves les plus en difficulté ne bénéficient pas suffisamment de cette dynamique
- Source d 'apprentissage pour les autres, l 'automatisation devient pour eux une source de difficulté
- L'adaptabilité nécessite de comprendre les enjeux des situations
- des généralisations et des décontextualisations, au lieu d'être favorisées, sont limitées, voire interdites par trop d 'automatisme

Un jeu sur les nombres

Gestion de l 'aide et gestion de la complexité

Un premier exemple : le problème de l 'autobus

Le cercle vicieux de l ’aide

- Comment aider l ’élève à résoudre un problème sans le résoudre à sa place ?
- Jusqu ’où gérer la complexité à la place de l ’élève
- Un premier exemple : le problème de l ’autobus

Le problème de l ’autobus

- L ’énoncé :

  Dans un autobus, il y a n voyageurs, à un arrêt, a voyageurs montent et b descendent. Combien y-a-t-il de voyageurs dans l ’autobus quand il repart ?

- Les variables :
  - Les termes « montent » et « descendent » peuvent être permutés
  - a peut être supérieur à b
  - etc.

Une analyse a priori

- Deux procédures de résolution :
  - une procédure plus « primitive » :

    $n' = n + a$

    $n'' = n' - b$
  - une procédure plus « experte » :

    $n' = n + (a-b)$
- Des passages « à la dizaine » :

  $35 + 7 - 5 = 42 - 5 = 37$
- Un objectif : assurer la mobilisation des deux types de procédures selon les nombres en jeu

Un scénario possible

- Résolution mentale : quatre exercices par jour
- un premier domaine numérique :

  20 < n < 40 ; a < 10 ; b <10 ; |a-b|<10

  jouer sur les variables du problèmes (ordre de montée/descente ; passage à la dizaine)

  faire expliciter les procédures

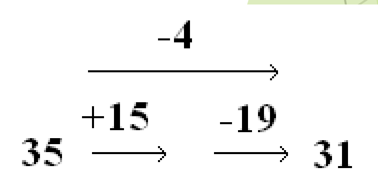
  assurer une réussite d ’au moins 80% des élèves
- un deuxième domaine numérique :

  30 < n < 50 ; 10 < a < 20 ; 10 < b <20 et |a-b |<10

  faire expliciter les procédures

  introduire un codage de la composition

  des transformations du type :



III.c. Calcul mental; ménager des cheminements cognitifs spécifiques

Une intervention ciblant les élèves les plus faibles

Une nouvelle expérimentation

- Des emprunts à la sociolinguistique, le recours à l ’écrit (Bautier, Lahire)
- Trois leviers :
  - Un entraînement régulier au calcul mental
  - L ’explicitation orale de méthodes (par le professeur)
  - Des bilans régulier de savoirs
    - s ’appuyant sur des textes rédigés collectivement et soumis au débat
    - visant la constitution d ’une mémoire collective de la classe

Des résultats : des cheminements cognitifs différents

- le recours à une certaine généricité
- des outils heuristiques transitoires

Le recours à une certaine généricité

Des écrits intermédiaires

- un exemple sur les entiers :

  “ 15x100 = 15000 ” ; la règle est limitée aux entiers et au domaine de calcul usuel (multiplication par 10^n avec $n < 3$)

- Des exemples partiels sur les décimaux, pouvant être accompagnés de quelques éléments de règle :

  “ 1,50x100 = 150 quand on multiplie par 100, on repousse la virgule de 2 rangs

  1,5x10^4 = 15000 ”

- Des énoncés illustrés par un exemple générique :

  “ Dans notre tête, mentalement, nous nous sommes dit que l'exposant indiquait de combien de rangs vers la droite, on déplaçait la virgule. Là comme le multiplicateur était 10^4, on l'a déplacée de 4 rangs vers la droite et on a complété par deux zéros car il manque deux nombres à la partie décimale. Exemple 1,5x10^4 = 15000.

- ”ou encore la formulation d’une règle plus décontextualisée :

  “ Pour multiplier un nombre par des puissances de 10 : on met autant de zéros à droite du nombre que l'indique l'exposant. ”

Une gradation du CM2 à la 5e

- une gradation dans les apports du calcul mental à la résolution de problèmes.
- Au CM2 : une plus grande aisance et une plus grande rapidité de traitement des opérations lors de la résolution de problèmes numériques.
- En 6e, l'apport est plus riche :
  - prévoir et contrôler leurs résultats
    - « *Pour moi, c'est important de trouver l'ordre de grandeur des opérations car après on peut comparer à son résultat et il faut trouver un résultat très proche de l'ordre de grandeur* »
    - Le statut des données changent, les élèves s 'autorise à les changer, à les simplifier
- Cet apport est encore plus riche en 5e , l'élève peut :
  - remplacer les données numériques soit par des nombres plus simples (arrondis ou plus petits) soit par des lettres pour trouver plus facilement le raisonnement à effectuer
    - " *Si dans des problèmes on a des chiffres difficiles, on peut les remplacer par des lettres ou par des nombres plus simples* "
    - ou bien :
    - " *Quand il y a des nombres compliqués, on les simplifie ; après les avoir simplifiés, on cherche une méthode et lorsque l'on trouve on l'applique aux nombres compliqués.* "

IV.d. Des exemples d'activités

Un exemple de résumé donné en REP+

« La différenciation entre les deux cycles C2 et C3 se fera par le choix des variables numériques (nombres entiers plus ou moins grands du CP au CM2, nombres décimaux à partir du CM1) et par le choix des opérations (essentiellement addition et soustraction puis multiplication au Cycle 2, les quatre opérations à partir du CM1) . »

Jeux pouvant être proposés à tous les niveaux

- **Jeux de mémoire visuelle ou auditive** : Mémoriser des nombres seulement écrits ou énoncés ; les restituer tels quels ou avec un traitement numérique (ranger dans l'ordre croissant ou décroissant, ajouter ou enlever 1, 10, multiplier ou diviser par un nombre donné…)
- **Jeu du furet :** compter, décompter de n en n (n entier à un, deux, ou trois chiffres) ; cas particulier des multiples de n (en particulier n = 10) ou de n décimal à partir du CM1.
- L'activité est collective et orale. Le maître interroge les élèves à tour de rôle dans un ordre quelconque. Un certain rythme doit être maintenu pour amener les élèves à calculer rapidement.
- **Jeux de portrait :** plusieurs modalités possibles :
  - Le maître choisit un nombre. Jeu de questions/réponses Le maître fait le portrait d'un nombre.
  - A partir d'une liste de nombres écrite au tableau, le maître fait le portrait d'un des nombres.

Jeux pouvant être proposés à tous les niveaux

- **Jeu du nombre caché :** Le maître choisit un nombre. Les élèves doivent le trouver en proposant des nombres. Le maître répond « trop grand » ou « trop petit
- **Jeu de l'autobus : (à partir du CE1)**
- **Jeu de la chaîne :** à partir d'un nombre de départ, on applique des transformations successives (+, -, x), il faut trouver le résultat final.
- **Le nombre pensé :**
  - l'inconnue peut être le nombre de départ ou le nombre d'arrivée. ex : « Je pense à un nombre ; je lui enlève 76 et je trouve 47 ; à quel nombre ai-je pensé ? »
  - Si l'inconnue est la règle, le jeu devient celui de **la règle pensée** (appelé aussi « drôles de couples ») : on donne 2 ou plusieurs couples de nombres ; il faut trouver la règle sous-jacente. La règle peut être ajouter n, enlever n, multiplier ou diviser par n, ou une combinaison de deux de ces règles : ex : x → 3 x + 5 ou x → 2 x - 1.
- **Le compte est bon ; cas particulier : objectif zéro :**
- **Le jeu de Syracuse : (seulement à partir du CM1)**
- **Vrai ou faux ?** avec la moitié, le double, le tiers, le quart…ex : « la moitié de 700 est 350, vrai ou faux ?»
- En plus des activités décrites ci-dessus, citons aussi les nombreuses situations de jeux stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes…) mettant en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples.

Activités en liaison avec la numération

- **Ecrire en chiffres les nombres :** 5 dizaines, 8 dizaines et 3 unités, 32 dizaines et 5 unités, 80 centaines, 150 dizaines…
- **Nombre de dizaines, centaines, unités de mille :** combien y a-t-il de dizaines dans 53, 546, de centaines dans 1758, d'unités de mille dans 145000…
- **Encadrement :** encadre le nombre 46 par les deux multiples de 10 les plus proches, le nombre 981 par les deux multiples de 10 les plus proches, par les deux multiples de 100 les plus proches…
- **Cas des nombres décimaux : (à partir du CM1)**
- Passer d'une écriture à une autre (écriture à virgule, fractionnaire, sous la forme « 7 unités et 61 centièmes ») ; en particulier décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur : 36,07 = 36 + 0,07 ou 36,07 = 36 + 7/100
- Compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule : de 7,2 à 8 ou de 9,5 à 10…
- Encadrer un décimal entre deux entiers consécutifs
- Encadrer un décimal entre deux décimaux : « encadrer le nombre 3,05 par deux nombres s'exprimant en dixièmes »
- Intercaler un décimal entre deux décimaux.

Points d’appui pour la mémorisation

- **L’entraînement n’est pas le seul ressort de la mémorisation.**
- Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l’autre facette de l’aide à la mémorisation.
- Pour des élèves en phase d’apprentissage, les résultats additifs ou multiplicatifs simples sont d’abord reconstruits (avant d’être produits instantanément), en utilisant plusieurs points d’appui.
- **Les appuis pour l’addition :**
  - Utilisation de la suite numérique, par surcomptage
  - Appui sur les doubles connus
  - Utilisation de la commutativité de l’addition : 2 + 9 c’est 9 + 2
  - Utilisation de décompositions par rapport à 5 :
  - 8 + 7 = 5 + 3 + 5 + 2 = 10 + 3 + 2 = 10 + 5 = 15
  - Utilisation du passage à la dizaine, avec les compléments à 10 : 8 + 5 = (8 + 2) + 3

Points d'appui pour la mémorisation

- **Pour la multiplication, on peut s'appuyer sur :**
  - les résultats rapidement connus des tables de 2 et de 5 (cycle 2)
  - le comptage de n en n pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé
  - la connaissance des carrés
  - la commutativité de la multiplication
  - le fait que multiplier par 4, c'est doubler 2 fois…
- Mémoriser les tables est le résultat d'un long processus. Plusieurs conditions doivent être réunies pour une bonne mémorisation.
  - La compréhension des opérations en jeu. Elles doivent avoir du sens pour l'élève (quel sens donner au calcul 6 x 8 ?)
  - Prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un répertoire de résultats. Le répertoire est progressivement organisé, complété et structuré en tables.
  - Prise de conscience du fait que certains résultats sont mémorisés et qu'un répertoire mental est entrain de se constituer.
  - Capacité à utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats « six fois huit, c'est huit de plus que cinq fois huit ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation.
- Entraînement des résultats mémorisés. Attention à ne pas procéder toujours par ordre croissant
- Connaître ses tables, ce n'est pas seulement être capable de dire instantanément n'importe quel résultat. Connaître 7 x 6, c'est être capable de dire que ça fait 42, mais c'est aussi être capable de répondre à 7 x ? = 42 ; 6 x ? = 42 ; 42 : 7 = ? ; 42 : 6 = ? ; de produire 6 x 7 et 7 x 6 comme décompositions multiplicatives de 42.

Activités en liaison avec les opérations

- Au cycle 2, ces activités feront intervenir essentiellement l'addition et la soustraction, très peu la multiplication. Au CE2, elles feront intervenir l'addition, la soustraction et un peu la multiplication. A partir du CM1, on centrera davantage sur la multiplication mais aussi sur la division.
- Les nombres décimaux pourront intervenir au CM1 mais surtout au CM2.
- La mention « calcul réfléchi » signale qu'une automatisation n'est pas exigée. Les procédures sont alors diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée. L'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorise les progrès des élèves.
- Ne pas oublier qu'avant d'être automatisé, tout calcul a le plus souvent d'abord été obtenu au moyen d'un calcul réfléchi, pendant un temps plus ou moins long.

Activités additives et soustractives :

- *Ajouter ou retrancher 1, 2 et 5, en particulier pour les nombres inférieurs à 20 (assurer la synonymie des expressions « ajouter 1 et avancer de 1 », « soustraire 1 ou retrancher 1 et reculer de 1 » ; le comptage de 2 en 2 ou de 5 en 5 en avant ou en arrière constitue un point d'appui)*
- *Décomposer un nombre inférieur à 10 à l'aide du nombre 5 ; décomposer un nombre compris entre 10 et 20 à l'aide du nombre 10*
- *Additionner deux nombres dont la somme est inférieure à 10 et décomposer un nombre inférieur à 10 sous forme additive*
- Maîtrise du répertoire additif : tables d'addition, compléments, différences et décompositions associées : ex : 6 + 7 = ? ; 6 + ? = 13 ; 7 + ? = 13 ; 13 – 6 = ? ; 13 – 7 = ? ; Décompositions additives de 10.
- *Compléments à 10* ou à 20, 100, 1000…, aux dizaines ou centaines supérieures : compléments de 430 à 500 puis de 2430 à 2500
- Ajouter ou retrancher entre elles des dizaines, des centaines, des milliers (Ex :20 + 30, 50 - 20, 200 + 300, 8000 - 5000)
- Calculer des sommes ou des différences du type : 20 + 7, 27 - 7, 200 pour aller à 237, 300 + 60, 360 - 60, 2000 + 42 en liaison avec la numération parlée.
- Ajouter ou soustraire un nombre entier (inférieur à 10) d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers…à un nombre quelconque : 76 + 3, 385 + 50, 525 - 30…(calcul réfléchi au Cycle 2)
- Ajouter ou soustraire des nombres entiers ronds, des nombres quelconques : 31 - 18, 450 - 180, 2600 + 1400 (calcul réfléchi)
- Calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes « qui vont ensemble » : 47 + 180 + 60 + 53 + 20 (calcul réfléchi)

Additions et soustractions mentales :

- Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples : 5,6 + 2,4 ; 7,2 - 2,5… (Calcul réfléchi)
- Complément d'un nombre décimal ayant 2 chiffres après la virgule au nombre entier immédiatement supérieur : complément à 1 de 0,45… (Calcul réfléchi)
- Calculer des écarts ou des compléments sur des nombres de deux ou trois chiffres (calcul réfléchi au Cycle 2)
- Garder la distance : écrire plusieurs différences égales : 958 - 792 = 968 – 802 =… (Calcul réfléchi)
- Adapter des stratégies utilisables pour soustraire, selon qu'on a à soustraire un « petit nombre » ou un « grand nombre » (calcul réfléchi au Cycle 2)
- Connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou multiples de 250 inférieurs à 1000 : 75 = 50 + 25 ; 1000 – 750 = 250
- Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux : 2,5 + 2,5 = 5 ; 7,5 + 7,5 = 15
- Encadrements par dizaines ou centaines consécutives
- Différentes écritures d'un nombre (calcul réfléchi)
- Calculer certaines sommes de deux nombres décimaux, en particulier ajouter un entier et un nombre décimal ayant un chiffre après la virgule : 15 + 2,6 ; 2,5 + 0,5 ; 4,8 + 0,6 …

Activités multiplicatives :

- *Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés correspondantes (point d'appui pour d'autres résultats)*
- Connaître les doubles et les moitiés correspondantes de nombres clés : 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 15, 25 (cycle 2)
- Tables de multiplication, d'abord par 2 et par 5. Recherche d'un facteur, quotients et décompositions associés : combien de fois 8 dans 48 ? Dans 50 ? Diviser 48 par 6 ou 50 par 8, décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à 10.
- Situer un nombre entre 2 résultats d'une table de multiplication : 37 est compris entre deux multiples de 7 : 5 x 7 et 6 x 7
- En dehors de celles de 2 et de 5, la mémorisation des tables de multiplication relève du cycle3. Mais, dès la fin du cycle 2, tous les résultats peuvent être reconstruits par les élèves (calcul réfléchi)
- Multiplication ou division par des puissances de dix : la règle des zéros : (multiplication par 10 ou par 100 à partir du CE1, par les puissances de 10 au CM1, multiplication et division au CM2 d'abord sur les entiers puis sur les décimaux en particulier au CM2).
- Faire la relation avec la numération écrite : 13 x 10, c'est 13 dizaines

Multiplications mentales :

- Calculs de produits ou de quotients sur des dizaines ou des centaines entières : 40 x 2, 30 x 4, 300 x 7, 30 x 50…
- Calculer les doubles, moitiés, quadruples et quarts de nombres entiers, lorsque le calcul reste simple : double de 35, moitié de 42, 240, 360 ou de 700, quart de 120 ou de 600 puis moitié de nombres impairs (calcul réfléchi)
- Produits d’un nombre à 2 chiffres par un nombre à 1 chiffre (calcul réfléchi)
- Produits d’un nombre à 2 chiffres par un nombre à 2 chiffres particulier (Multiple de 10, 11, 15, 19, 22, 25, 33, 50…). Dans ce dernier cas, les élèves peuvent écrire des calculs intermédiaires (calcul réfléchi)
- Produits simples d’un nombre décimal par un entier : 0,8 x 7 ; 0,6 x 5 ; 1,2 x 3 ; 1,2 x

Divisions mentales, Produits égaux, etc.

- **Divisions mentales :**
- 158 : 2   305 : 5   549 : 9   568 : 8 … en décomposant : 305 = 300 + 5 ; 549 = 540 + 9 … (calcul réfléchi)
- **Produits égaux :**
- Déterminer différentes écritures d'un même nombre sous la forme d'un produit de 2 facteurs ; déterminer si plusieurs écritures multiplicatives sont égales sans les calculer explicitement (ex : 8 x 36 et 12 x 24), utiliser la décomposition d'un nombre en produits de facteurs pour calculer mentalement des produits (ex : 18 x 36 = 2 x 9 x 9 x 4 = 81 x 8 = 648) (calcul réfléchi)
- Connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères » entiers ou décimaux : 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75, 15 est la moitié de 30,…relations entre 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1…

Encadrements par des multiples successifs

- (En liaison avec la Technique Opératoire de la division)
- Pour chaque opération (somme, différence, produit), travailler sur l'ordre de grandeur du résultat (calcul approché)
- Il s'agit souvent de repérer le nombre « rond »(dizaine ou centaine entière, millier entier) le plus proche d'un nombre donné.
- Ex : - Donner un résultat approché du produit 12 x 38…
- Le produit 12 x 81 est-il entre 900 et 1000 ou entre 1600 et 1800 ?
- Parmi les nombres suivants, quel est le plus proche de 725 x 37 ? 2680, 27000, 16000, 200000.
- Parmi les nombres suivants, quel est le plus proche du quotient entier de 6052 divisé par 17 ? : 36, 98, 356.

Résolution mentale de problèmes

- Il s’agit de problèmes classiques plus ou moins complexes faisant intervenir une opération (addition, soustraction, multiplication ou division) et des nombres assez « simples » pour ne pas compliquer les calculs. L’élève doit reconnaître rapidement l’opération sous-jacente et calculer mentalement la solution.
- Le maître lit le problème deux fois. On peut autoriser l’élève à prendre en note les données qui lui semblent utiles, mais la résolution doit être mentale ; on ne doit pas « poser l’opération ».

Modalités de mise en oeuvre

- Les activités proposées sont essentiellement orales sauf dans le cas d'un calcul réfléchi où l'élève peut être autorisé à noter par écrit des calculs intermédiaires (risque de saturation de la mémoire de travail).
- **Les séances de calcul mental sont quotidiennes et peuvent être de deux types :**

- Les élèves doivent répondre assez rapidement, le rythme doit être soutenu, de manière à favoriser la concentration des élèves. Lors de ces séances, quelques procédures peuvent être explicitées mais on vise plutôt une certaine automatisation et de la rapidité (par ex, connaissance des tables, des compléments à 10 ou à la dizaine supérieure, règle des zéros…).
- Des séances plus longues (pouvant durer jusqu'à 20 minutes) où
  - le maître aura le souci de faire expliciter et confronter les procédures.
  - Le rôle du maître est de favoriser la diffusion de ces nouvelles procédures à toute la classe. Cela devrait amener les élèves en difficulté à abandonner leurs anciennes procédures pour en adopter de nouvelles, plus performantes.
  - La confrontation des procédures permet un enrichissement individuel et/ou collectif.
  - Certaines procédures peuvent être pointées comme souvent efficaces, mais liberté doit être laissée à l'élève de choisir la procédure qu'il est le mieux à même de porter à son terme.
  - Des procédures peuvent être introduites par le maître quand cela s'avère nécessaire