



LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ

Résolution de problèmes
arithmétiques : lesquels,
pour quoi, comment.

Catherine Houdement

ESPE Paris

20 novembre 2018



RECHERCHE
EN DIDACTIQUE
DES SCIENCES

Plan

- Quelles intentions d'enseignement pour la résolution de problèmes ?
- Incursion dans un manuel de 6^{ème}
- Approche cognitiviste
- le rôle des problèmes « basiques »
- Vigilance face à certaines propositions méthodologiques
- Vers une organisation argumentée des problèmes arithmétiques verbaux
- Des stratégies d'élèves pour réussir en cycle 3 (*non fait*)
- Enseigner les problèmes basiques ?
- Enseigner les problèmes basiques « réalistes » (*non fait*)
- Conclusion : un travail aux multiples facettes

Quelles intentions pour « la résolution de problèmes »

Les problèmes (à résoudre) sont donnés avec une intention concernant l'élève (ou les élèves)

Intention mathématique

1. Participer à l'apprentissage d'un savoir, d'une technique : vers décontextualisation et institutionnalisation
2. Mettre en relation savoirs, techniques et informations
3. Construire une procédure, une stratégie, un raisonnement , nouveaux relativement au répertoire didactique de la classe
4. Comprendre le fonctionnement mathématique

Quelles intentions pour « la résolution de problèmes »

Les problèmes (à résoudre) sont donnés avec une intention concernant l'élève (ou les élèves)

Intention « sociale »

- Collaborer : instaurer un travail de groupe
- S'organiser
- S'écouter : respecter la parole de l'autre, ne pas parler trop fort
- Présenter : rendre compte de la démarche, prendre la parole en public devant la classe

Intention « sociale mathématique »

- argumenter , prouver
- distinguer la narration de la recherche de la réponse argumentée au problème

Quelles intentions pour « la résolution de problèmes »

Pour l'enseignant devraient être en relation

Intentions et

- **problème** (ou problèmes) proposé pour le travail de l'élève
- **supports et outils**
- **modalités de travail**
- « **fermeture** » du problème
- **avenir** du problème

Compte -tenu des contraintes.... spatiales temporelles,
« humaines »...

Quelles intentions pour « la résolution de problèmes »

Exemple : si des élèves de CE2 « agrègent des nombres » dans tout problème numérique

Travail collectif sur

Répartir des jetons dans des boîtes bleues et blanches. Il doit y avoir le même nombre de jetons dans les boîtes de la même couleur, et aucune boîte vide.

a) 17 jetons, 2 boîtes bleues et 3 boîtes blanches



b) idem avec 18 jetons

c) idem avec 20 jetons

d) 17 jetons, 2 boîtes bleues et 4 boîtes blanches

Conclusion 1

- Quand on donne un problème à résoudre, expliciter dans quelle intention
 - ... et se libérer de la multitude de termes autour des problèmes : exercices, situations- problèmes, tâches complexes, modélisation,
 - ... aux intentions mal définies ou déterminées en soi
- Dans le contexte professionnel, un seul terme : problème, avec intention

« Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ». (Feyfant, 2015, p.9)

INCURSION DANS UN MANUEL DE 6^{ÈME}

XWYK 6^{ème} 2016: chapitre 5

Multiplication (p.99-116) : 6 parties

- A- Le sens et les propriétés d'un produit : **cours (2 pages)** et *–je m'entraîne j'approfondis–* (2 pages) **dont une dizaine de problèmes verbaux**
- B- La multiplication de deux nombres décimaux : **idem**
- C- La vraisemblance des résultats : **idem**
- Bilan /Atelier Numérique (2 pages)
- *Résolution de problèmes* (2 pages, **13 problèmes verbaux**)
- *Problèmes complexes* (1 page, **2 problèmes verbaux**)

Bilan : 45 problèmes verbaux qui relèvent de la multiplication (avec parfois aussi addition).

Pas d'intrus (par exemple un pb « uniquement » additif)

Je m'entraîne

31 Recopier et compléter les égalités suivantes :

- a) $4,68 \times 10 = \dots$
- b) $832,47 \times 100 = \dots$
- c) $0,67 \times 10 = \dots$
- d) $3,25 \times 1\,000 = \dots$

32 Recopier et compléter les égalités suivantes :

- a) $42,95 \times 0,1 = \dots$
- b) $137 \times 0,01 = \dots$
- c) $121,4 \times 0,001 = \dots$
- d) $12,3 \times 0,001 = \dots$

33 Recopier et compléter les égalités suivantes :

- a) $1,38 \times 0,1 = \dots$
- b) $0,037 \times 100 = \dots$
- c) $0,46 \times 1\,000 = \dots$
- d) $79,35 \times 0,001 = \dots$

34 Recopier et compléter les égalités suivantes :

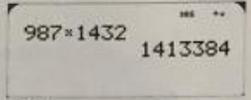
- a) $\dots \times 10 = 35,4$
- b) $127,3 \times \dots = 1,273$
- c) $0,89 \times \dots = 890$
- d) $\dots \times 100 = 8,54$

35 1. Poser et effectuer la multiplication 345×48 .

2. Dédurre de la question 1 le résultat des produits suivants :

- a) $3,45 \times 4,8$
- b) $34,5 \times 4,8$
- c) $0,345 \times 48$
- d) $3,45 \times 0,48$

36 En utilisant cet écran de calculatrice, et sans faire de calcul, recopier et compléter les égalités ci-dessous :



- a) $9,87 \times 14,32 = \dots$
- b) $98,7 \times 143,2 = \dots$
- c) $0,987 \times \dots = 1,413\,384$
- d) $\dots \times 143,2 = 14,133\,84$

... et je révise sur **KWYK**

37 Sachant que $78 \times 432 = 33\,696$, recopier et compléter les égalités suivantes avec « = » ou « \neq ».

- a) $7,8 \times 43,2 \dots 336,96$
- b) $7,8 \times 4,32 \dots 3,369\,6$
- c) $0,78 \times 43,2 \dots 33,696$
- d) $0,78 \times 0,432 \dots 0,033\,696$

38 Sachant que $27 \times 568 = 15\,336$, écrire :

- a) un produit de deux nombres égal à 15,336
 - b) un produit de deux nombres égal à 1 533,6
 - c) un produit de deux nombres égal à 0,153 36
- Il y a plusieurs possibilités.

39 Poser et effectuer les multiplications suivantes :

- a) $1,7 \times 4,2$
- b) $4,02 \times 5,3$
- c) $0,25 \times 14,3$
- d) $5,26 \times 1,01$

40 Poser et effectuer les multiplications suivantes :

- a) $78,32 \times 1,1$
- b) $3,001 \times 2,07$
- c) $0,05 \times 18,4$
- d) $1,11 \times 17,8$

41 Carla achète 2,3 mètres de tissu à 15,60 € le mètre. Combien Carla va-t-elle payer le tissu ?



42 Caroline achète au marché un poulet de 1,7 kg à 12,90 € le kg. Quel est le prix du poulet ?

43 Pour la Saint-Valentin, Roméo veut offrir à sa fiancée une chaîne en or de 3,2 g. Le gramme d'or est vendu 65,90 €. Calculer le prix que paiera Roméo pour ce bijou.

44 Retrouver le prix effacé sur cette publicité.



J'approfondis

45 Dans une boutique de bonbons, Lola achète 250 g de caramels à 14,50 € le kg pour offrir à ses employés. Combien Lola a-t-elle payé pour ces friandises ?



46 Michel veut acheter du carrelage pour refaire sa terrasse rectangulaire. Les dimensions de sa terrasse sont de 3,5 m de long et 2,75 m de large. Calculer la surface, en m², à carreler.

47 Pour préparer sa fête d'anniversaire, Marc a acheté 3 cartons de bouteilles de jus de fruit. Dans chaque carton, il y a 6 bouteilles de 0,75 L. A-t-il acheté plus de 12 L de boisson ?

48 Le mile est une unité de longueur notamment utilisée aux États-Unis. Un mile correspond à 1,61 km environ. La distance à vol d'oiseau entre New York et Miami est d'environ 1 090 miles. Calculer, en km, la distance entre New York et Miami.

49 Au marché, Manon a acheté 2,2 kg de pêches à 1,95 € le kg, et 1,7 kg d'abricots à 2,30 € le kg. Calculer le montant de ses achats.

50 Lors d'un concours, des cuisiniers ont décidé de réaliser une omelette géante. Pour cela, ils ont commandé 110 cartons contenant chacun 12 douzaines d'œufs.



Sachant qu'un œuf pèse en moyenne 60 g, calculer la masse, en kg, de cette omelette géante.

51 Pour la rentrée scolaire, les professeurs de mathématiques du collège ont commandé des règles à 0,45 € pièce, des équerres à 0,60 € pièce, des rapporteurs à 0,75 € pièce, et des compas à 1,75 € pièce.

Ils ont construit le tableau suivant à l'aide d'un tableur pour calculer leur dépense :

| | A | B | C | D |
|---|----------------------|----------|----------------------|-------------------|
| 1 | | Quantité | Prix unitaire (en €) | Prix total (en €) |
| 2 | Règle | 30 | | |
| 3 | Équerre | 25 | | |
| 4 | Rapporteur | 15 | | |
| 5 | Compas | 15 | | |
| 6 | Total de la commande | | | |

1. a) Recopier le tableau précédent sur une feuille de tableur.

b) Quel nombre doit-on écrire dans la cellule C2 ?

c) Compléter les cellules C3, C4 et C5.

2. a) Quelle formule doit-on écrire dans la cellule D2 ?

b) Généraliser la formule précédente aux cellules D3, D4 et D5.

3. a) Quelle formule doit-on écrire dans la cellule D6 ?

b) Quel est le montant des achats ?

52 Les caméras utilisées pour le cinéma filment en « 24 images par seconde », cela signifie que chaque seconde, 24 images défilent à l'écran.



En utilisant une calculatrice, calculer le nombre d'images qui défilent durant un film de 1 h 42 min 34 s.

53 La voiture de Delphine consomme environ 6,2 litres d'essence aux 100 km. Cela signifie que lorsqu'elle roule 100 km, elle utilise 6,2 litres d'essence. Ce week-end, Delphine doit parcourir 224,6 km à l'aller et au retour. Consommara-t-elle plus de 25 litres de carburant pour effectuer ces trajets ?

50 Lors d'un concours, des cuisiniers ont décidé de réaliser une omelette géante. Pour cela, ils ont commandé 110 cartons contenant chacun 12 douzaines d'œufs.



Sachant qu'un œuf pèse en moyenne 60 g, calculer la masse, en kg, de cette omelette géante.

1-Grandeurs : masse
Quantité (œuf , carton,
voire « douzaine »)

2- Pb basiques

Rapports directs entre
grandeurs : proportionnalité
double

Proportionnalité simple
composée

Conversion g /kg

3- Nombres : entiers, sauf
résultat final

4- Connaissances

pragmatiques ..à inhiber

Résolution de problèmes

79 Problème résolu

Modéliser → reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations multiplicatives

Au marché, Marie achète 500 g de fraises à 4,80 € le kg, 800 g de pêches à 3,90 € le kg, une barquette de 250 g de framboises à 2,30 €, et des bananes. Elle paie avec un billet de 20 €.

La vendeuse lui rend 9,25 €. Calculer le prix des bananes.



Solution

Il faut commencer par bien lire l'énoncé en cherchant les données utiles.

→ On calcule le prix payé pour les fraises, les pêches et les framboises :
 $(0,5 \times 4,80) + (0,8 \times 3,90) + 2,30$
 $= 2,4 + 3,12 + 2,30$
 $= 7,82$

→ On calcule ensuite le montant total des achats de Marie :
 $20 - 9,25 = 10,75$

→ On calcule le prix des bananes :
 $10,75 - 7,82 = 2,93$

→ On répond enfin par une phrase :
 Le prix des bananes est donc de 2,93 €.

80 Problème d'application

Pascal achète à la boucherie 900 g de saucisses à 11,90 € le kg, 450 g de jambon à 9 € le kg, et deux steaks hachés. Il paie avec un billet de 20 €.

Le boucher lui rend 1,95 €.

Calculer le prix des steaks hachés.

81 Une famille de quatre personnes a décidé de réduire sa consommation d'eau en prenant des douches à la place des bains habituels. Une douche consomme environ 70 litres d'eau, contre 180 litres d'eau pour un bain. Sachant que, dans cette famille, chaque personne prend une douche par jour, calculer la quantité d'eau économisée sur un an. Justifier la réponse.

114 Nombres et calculs

82 Un théâtre, dont les tarifs sont donnés ci-dessous, est composé de 28 rangées de 22 sièges. Lors d'une représentation qui affiche complet, il y a 215 enfants parmi les spectateurs.

| Tarifs du théâtre | |
|--------------------------|--------|
| Adulte | 9,50 € |
| Enfant (moins de 12 ans) | 6 € |

Calculer le montant de la recette lors de cette représentation. Justifier la réponse.

83 Les dentistes recommandent de se laver les dents deux fois par jour pendant deux minutes.

1. Calculer le temps passé à se laver les dents pendant une année.

2. Est-il vrai que le temps passé, en une année, à se laver les dents est proche d'une journée entière? Justifier la réponse.



84 Voici les tarifs d'une piscine :

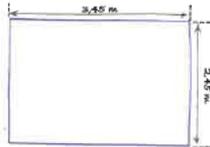
| Tarifs de la piscine | Hors vacances scolaires | Pendant les vacances scolaires |
|------------------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| Adulte (plus de 12 ans) | 4,50 € | 5,20 € |
| Enfant (plus de 4 ans) | 3 € | 3,50 € |
| Bébé | 1 € | 1,30 € |
| Tarif réduit (étudiant, senior...) | 3,50 € | 4 € |

Durant les vacances scolaires, Sébastien et Vanessa ont amené leurs trois enfants, Mathilde, 9 ans, Raphaël, 5 ans, et Camille, 1 an, à la piscine. Calculer le prix payé par la famille pour cette sortie à la piscine. Justifier la réponse.

85 Jules a décidé de refaire le grillage de son poulailler.

Voici un plan du poulailler :

Le grillage qu'il souhaite acheter est vendu par rouleaux de 5 mètres et coûte 19,85 € le rouleau. Calculer la somme dépensée pour refaire ce grillage.



86 Carole souhaite acheter une robe de soirée. La robe qu'elle désire est affichée à 75 € en magasin.

Carole est habile de ses mains et décide de coudre la robe elle-même.

Elle achète pour cela 2,3 mètres de tissu à 15,90 € le mètre, une douzaine de boutons à 0,75 € pièce, du fil pour 3,90 €, et 3,5 mètres de ruban à 4,50 € le mètre.

Calculer la somme économisée par Carole en réalisant elle-même sa robe.



87 Alexandre est passionné de musique. Depuis plusieurs mois, il télécharge des titres de musique sur un site en ligne. Chaque titre coûte 1,19 €.

Le site propose maintenant un abonnement mensuel qui permet de télécharger des titres de manière illimitée pour 9,99 € par mois.

Pour connaître sa consommation, Alexandre a noté le nombre de titres téléchargés durant l'année qui vient de s'écouler :

| Mois | Jan. | Fév. | Mars | Avril | Mai | Juin |
|------------------|------|------|------|-------|-----|------|
| Nombre de titres | 9 | 11 | 7 | 9 | 12 | 13 |

| Mois | Juill. | Août | Sept. | Oct. | Nov. | Déc. |
|------------------|--------|------|-------|------|------|------|
| Nombre de titres | 15 | 14 | 12 | 11 | 9 | 15 |

S'il télécharge autant de titres que l'année passée, quelle somme Alexandre pourra-t-il économiser l'année prochaine en optant pour l'abonnement illimité? Justifier la réponse.

88 Voici les tarifs proposés par une pizzeria :

| Tarifs | |
|---------------------------------|------------------|
| De 1 à 4 pizzas achetées : | 7,30 € la pizza. |
| À partir de 5 pizzas achetées : | 6,40 € la pizza. |
| À partir de 9 pizzas achetées : | 5,50 € la pizza. |



- Une famille commande 3 pizzas. Combien va-t-elle payer? Justifier la réponse.
- Un groupe d'amis commande 7 pizzas. Combien vont-ils payer? Justifier la réponse.
- Un club de football commande 12 pizzas. Combien va-t-il payer? Justifier la réponse.

89 Sylvain a acheté un ordinateur. Le prix affiché en magasin était de 799,95 €.

Il a décidé de payer son ordinateur en plusieurs fois. Après un premier paiement de 75,30 €, il devra payer 11 mensualités de 71,50 €.

Calculer le coût supplémentaire du paiement en plusieurs fois. Justifier la réponse.

90 À l'occasion de leur mariage, Claire et Olivier veulent commander des dragées pour leurs 80 invités.

Ils ont prévu d'offrir à chaque personne un pochon en tulle garni de 20 g de dragées aux amandes et de 10 g de dragées au chocolat.

Voici les tarifs de la boutique dans laquelle ils vont commander :

| Articles | Prix |
|-------------------------------|---------|
| Boîtes en carton (par 10) | 4,30 € |
| Pochons en tulle (par 10) | 2,90 € |
| Coffrets en plastique (par 5) | 3,10 € |
| Dragées aux amandes (le kg) | 24,90 € |
| Dragées au chocolat (le kg) | 12,90 € |

Calculer le prix total de la commande. Justifier la réponse.

91 Les élèves d'un collège souhaitent récolter des fonds pour une association. Ils décident de faire des gâteaux pour les vendre au marché de Noël de leur village. Voici la liste de leurs achats :

- 3 paquets de farine à 0,85 € le paquet
- 10 tablettes de chocolat à 2,15 € la tablette
- 4 plaquettes de beurre à 1,85 € la plaquette
- 1 paquet de levure chimique à 2,40 €
- 3 douzaines d'œufs à 3,25 € la douzaine

Avec leurs achats, ils ont confectionné 6 plaques de gâteaux. Chaque plaque peut être découpée en 20 parts.

Ils espèrent vendre chaque part de gâteau 1,50 €. S'ils arrivent à vendre toutes les parts, calculer le bénéfice qu'ils pourront reverser à l'association.

Expliquer la démarche.

90 À l'occasion de leur mariage, Claire et Olivier veulent commander des dragées pour leurs 80 invités. Ils ont prévu d'offrir à chaque personne un pochon en tulle garni de 20 g de dragées aux amandes et de 10 g de dragées au chocolat.



Voici les tarifs de la boutique dans laquelle ils vont commander :

| Articles | Prix |
|-------------------------------|---------|
| Boîtes en carton (par 10) | 4,30 € |
| Pochons en tulle (par 10) | 2,90 € |
| Coffrets en plastique (par 5) | 3,10 € |
| Dragées aux amandes (le kg) | 24,90 € |
| Dragées au chocolat (le kg) | 12,90 € |

Calculer le prix total de la commande. Justifier la réponse.

1-Grandeurs : quantités (invités, pochons), masses de dragées (2 sortes) ; prix au kg et à l'unité.

2- Pb multiplicatifs basiques sous jacents : RD2G : proportion. simple composée + Pb additif
Conversion g /kg

3- Nombres : Nombres décimaux

4- Bcp d'informations (notamment grandeurs en jeu)
Connaissances pragmatiques

Problème complexe 1

Aujourd'hui, Rémi, 15 ans, est allé chez son médecin pour demander un certificat médical pour son club de sport. Il a regardé l'heure en arrivant et en sortant du cabinet médical.

Dans la salle d'attente, il a lu un magazine qui présentait les informations suivantes.

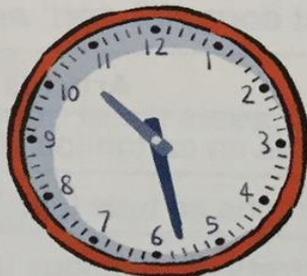


Calculer le nombre de battements cardiaques de Rémi durant le temps passé dans le cabinet du médecin.

Heure d'arrivée



Heure de départ



Document

Le contenu du magazine

Le rythme cardiaque correspond au nombre de battements du cœur par unité de temps (pulsations par minute).

Il varie en fonction de nos activités et de notre âge.

Le rythme cardiaque au repos

Les valeurs de la fréquence cardiaque au repos varient selon l'âge :

| | |
|---------------|---------------------------|
| Bébé | 120 pulsations par minute |
| Enfant | 100 pulsations par minute |
| Adolescent | 80 pulsations par minute |
| Adulte | 70 pulsations par minute |
| Personne âgée | 65 pulsations par minute |

Conclusion 2 (sur ce manuel)

« variantes » des problèmes de ce chapitre

1. Grandeurs en jeu : collection, prix, longueur aire, volume, durée...
2. Type de problème multiplicatif.
Autres types de problèmes
3. Taille / nature des nombres en jeu (entier, décimal, décimal inférieur à 1, rationnel n-d, réel n-r)
4. Densité des informations
5. Dispersion / structuration des informations (en texte, en tableau, document « authentique »)

Le point de vue de cognitivistes

**COMMENT RÉUSSIT-ON À RÉSOUDRE DES
PROBLÈMES ?**

Comment réussit-on ces problèmes?

LES MASSIFS DE TULIPES

Il s'agit à chaque fois de calculer le nombre de tulipes dans un massif :

- a) un massif de fleurs, formé de 60 tulipes rouges et 15 tulipes jaunes ;
- b) un massif de 60 rangées de 15 tulipes ;
- c) un massif de 60 fleurs, formé de tulipes et de 15 jonquilles ;
- d) 60 tulipes disposées en 15 massifs réguliers.

Un aparté sur les mots inducteurs

- A. Deux classes A et B. Dans la classe A il y a 19 élèves, ce qui fait 7 élèves de moins que dans la classe B. Combien d'élèves dans la classe B ?

- B. Marie a récolté des marrons qu'elle a mis dans un sac. Son amie ajoute 12 marrons dans le sac. Le sac contient maintenant 28 marrons. Combien en a-t-elle récolté seule ?

L'anniversaire d'Anita ©ARMT cat.5 6 7

C'est l'anniversaire d'Anita.

Son amie Berthe lui apporte un gâteau au chocolat.

Sur ce gâteau elle a placé 7 bougies qui indiquent l'âge d'Anita : des rouges et des vertes.

Chaque bougie rouge vaut dix ans et chaque bougie verte vaut un an.

Son ami Charles lui apporte une tarte aux fraises sur laquelle il a placé 8 bougies qui indiquent aussi l'âge d'Anita : des bleues et des vertes.

Chaque bougie bleue vaut douze ans et chaque bougie verte vaut un an.

Quel est l'âge d'Anita ?

Expliquez comment vous avez trouvé son âge.

Comment réussit-on un problème :

Deux processus cognitifs en jeu

Jean Julo 2002 *Grand N* n°69

Processus représentationnels

Le sujet construit une représentation cognitive (mentale) du problème.

Le problème peut lui évoquer un problème connu (ou pas).

Processus opératoires

Le sujet déclenche un traitement :

- * Le traitement peut être inféré de sa mémoire s'il a reconnu d'une certaine façon le problème : *vous et les massifs de fleurs*
- * S'il ne reconnaît pas le problème, il lui faut construire une nouvelle stratégie : *l'anniversaire d'Anita*

Attention : ces processus sont simultanés, ils interagissent !

La représentation d'un problème, que se construit un sujet, oscillerait entre deux « possibilités extrêmes »

1. Ce problème ressemble à un problème connu

→ traitement inféré de mémoire :

les massifs de fleurs

2. Ce problème ne rappelle rien au sujet

→ construction d'une stratégie (nouvelle) :

l'anniversaire pour des élèves de cycle 3

**Reconnaitre un problème est lié
à la représentation (évolutive) que le sujet s'en fait
et à sa mémoire des problèmes**

Julo 1995

Conclusion 3

Des enjeux pour l'enseignement des problèmes

1. Enrichir la mémoire des élèves sur les problèmes
 - Vers élèves : donner des occasions aux élèves de résoudre des problèmes et de **les réussir seuls**
 - Vers enseignants /vers programmes : définir des types de problèmes dont on attend qu'ils soient **résolus « automatiquement »** par les élèves

Mais quels problèmes ?

2. Permettre l'inventivité stratégique et le réinvestissement de connaissances

Mais quels problèmes ?

(Houdement 2009)

Hypothèse pour problèmes à « mémoriser » :

→ les « briques élémentaires » de raisonnement relativement à un champ notionnel.

Que j'appelle **les problèmes « basiques »** (Houdement , 2017)

Par exemple en arithmétique les problèmes liés à une opération :

2 données trouver la 3^{ème}

($2n+1$ données pour la proportionnalité),

sans information superflue ,

avec syntaxe simple

« problème à une étape »

Vergnaud (dir, 1997) *Le Moniteur de Mathématiques, cycle 3, Résolution de problème*. Fichier Pédagogique. Nathan

→ Typologie Vergnaud (1997; 2001) connue mais à mieux utiliser :

structures additives et structures multiplicatives

- Elle répond à la question du sens des opérations !
- **Les sens de l'addition-soustraction** sont portés par les types de problèmes : composition d'états, transformation d'états, comparaison additive d'états, composition de transformations..) associés à la place de l'inconnue
- **Les sens multiplicatifs** :
 - multiplication, division partition, division- quotient, proportionnalité, les quatre types *de rapport simple entre deux grandeurs*
 - proportionnalité simple composée,
 - proportionnalité multiple (aire, volume ...)
 - comparaison multiplicative (à travailler **avant** la proportionnalité)

Conclusion 3 bis

Un regard affiné sur des propositions d'aides à la résolution

- De manuels de 6^{ème}
- En général

79 Problème résolu

Modéliser → reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations multiplicatives

Au marché, Marie achète 500 g de fraises à 4,80 € le kg, 800 g de pêches à 3,90 € le kg, une barquette de 250 g de framboises à 2,30 €, et des bananes. Elle paie avec un billet de 20 €.



La vendeuse lui rend 9,25 €. Calculer le prix des bananes.

Solution

Il faut commencer par bien lire l'énoncé en cherchant les données utiles.

→ On calcule le prix payé pour les fraises, les pêches et les framboises :

$$\begin{aligned}(0,5 \times 4,80) + (0,8 \times 3,90) + 2,30 \\ = 2,4 + 3,12 + 2,30 \\ = 7,82\end{aligned}$$

→ On calcule ensuite le montant total des achats de Marie :

$$20 - 9,25 = 10,75$$

→ On calcule le prix des bananes :

$$10,75 - 7,82 = 2,93$$

→ On répond enfin par une phrase :

Le prix des bananes est donc de 2,93 €.

Aide ?

* Un conseil peu opérationnel

* Une procédure unique vers la réponse appelée solution

XWYK 6^{ème} 2016: chapitre 5

Résolution de problèmes complexes (79 à 91) p114

Les étapes pour résoudre un problème

JE LIS ATTENTIVEMENT L'ÉNONCÉ...

8 Fred, qui a 10 ans, remarque que le robinet de sa cuisine fuit. Il perd 1,5 litres d'eau en 2 heures. Combien de litres d'eau s'échappent de ce robinet en une journée ?

JE REPÈRE LES DONNÉES UTILES EN RECOPIANT « CE QUE JE SAIS » ET « CE QUE JE CHERCHE ».

Je sais que:
- Fred, 10 ans
- 1,5 litres en 2h
Je cherche:
? litres en 1 jour

J'ÉLIMINE LES DONNÉES INUTILES.

COMMENT « CE QUE JE SAIS » VA ME PERMETTRE DE TROUVER « CE QUE JE CHERCHE » ?

JE CONSTRUIS MON RAISONNEMENT EN M'AIDANT ÉVENTUELLEMENT D'UN DESSIN OU D'UN SCHEMA.

(15) (24) (3) (24h)
1 journée = 24h

J'ÉCRIS LES OPÉRATIONS NÉCESSAIRES.

J'EFFECTUE LES CALCULS QUE JE VÉRIFIE ENSUITE EN COMPARANT PAR EXEMPLE, AVEC UN ORDRE DE GRANDEUR DES RÉSULTATS.

$24 \times 2 = 12$
 $1,5 \times 12$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 1,5 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 18,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \quad 2 \\ 04 \quad | \quad 12 \\ 0 \quad | \\ \hline \end{array}$$

JE VÉRIFIE QUE LA SOLUTION FINALE À MON PROBLÈME EST VRAISEMBLABLE.

JE RÉDIGE CLAIEMENT EN FAISANT DES PHRASES; MON RAISONNEMENT DOIT ÊTRE COMPRIS PAR UN CAMARADE.

LES RÉSULTATS INTERMÉDIAIRES SONT ÉCRITS.

TOUS LES CALCULS SONT EFFECTUÉS.

Exercice n°8
Je sais que le robinet perd 1,5 l par

Aide ?

pourtant souvent proposée

Extrait de *Myriade*
6eme
2009, 2014
et 2016 p.241

Des tâches à questionner

- Souligner les informations utiles AVANT de résoudre
- Barrer les informations inutiles AVANT de résoudre
- Etc.. .

Elles ne permettent pas d'améliorer la résolution de problèmes

- 1- Elles supposent qu'il existerait une aptitude générale à la résolution de problèmes, indépendante des connaissances notionnelles
- 2- Quand on les analyse, ce sont des tâches qui ne peuvent pas être faites sans résoudre le problème, elles sont partie prenante de la résolution, elles ne sont pas antérieures, ce que confirment les travaux de psychologie cognitive

Dans une perspective psychologique, en effet, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet **d'élaborer** une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple.

On peut se demander dans quelle mesure les tâches scolaires identifiées comme problèmes arithmétiques correspondent à cette définition. Il est inutile ici de revenir sur les critiques abondantes dont ces problèmes ont été l'objet; leur disparition des moyens d'enseignement issus de la réforme des années soixante est un fait. Cette mise à l'écart des problèmes arithmétiques, qualifiés de traditionnels, tenait à ce que, pour la plupart d'entre eux, ils consistaient en des problèmes d'application mécanique d'une règle ou d'une opération qui venaient d'être enseignées; rares étaient les problèmes qui demandaient une élaboration personnelle de la part de l'élève:

Un problème arithmétique s'inscrit dans une «relation didactique» (SCHUBAUER-LEONI 1986) où fonctionnent des représentations qui organisent et délimitent les attentes réciproques des élèves et des maîtres envers ce qu'est un problème, ce qu'on fait dans ce cas. Par exemple, un problème arithmétique c'est un énoncé qui comprend des données numériques; celles-ci devront être toutes utilisées pour trouver une solution qui s'obtient à l'aide des notions ou des algorithmes qui viennent d'être appris; c'est au maître que revient de juger de la réponse, juste ou fausse, en tenant compte éventuellement du mode de rédaction de cette réponse.

« Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ». (Feyfant, 2015, p.9)

DES STRATÉGIES D'ÉLÈVES DE CYCLE 3 POUR RÉUSSIR DES PROBLÈMES

NON PRÉSENTÉ

Houdement 2007, 2011

DES PISTES ET DES INCONTOURNABLES POUR ENSEIGNER LES PROBLÈMES BASQUES

Comment permettre aux élèves de réussir SEULS des problèmes « basiques » ou pas ?

Des pistes à étudier, à enrichir

- Situations dans un contexte d'action arrêtée : un milieu qui rétroagit sur la réponse, pas un seul problème mais une suite de problèmes

Comment permettre aux élèves de réussir SEULS Les problèmes « basiques » ou pas ?

Des pistes à étudier, à enrichir

- Situations dans un contexte d'action arrêtée
- Construire un dispositif qui aide à relier et catégoriser les problèmes résolus Priolet 2008

En très bref : laisser effectivement chercher le problème aux élèves (**C**hercher), solliciter des conversions de **R**éprésentations sémiotiques, faire des liens avec des expériences passées (mettre en **R**éseau), **C**atégoriser les problèmes en utilisant un cahier mémoire des pb résolus classés avec un pb ressemblant

Comment permettre aux élèves de réussir SEULS Les problèmes « basiques » ou pas

Des pistes à étudier, à enrichir

- Situations dans un contexte d'action arrêtée
- Construire un dispositif qui aide à relier et catégoriser les problèmes résolus Priolet 2008
- Résoudre non pas un problème, mais un « assortiment » (Genestoux 2002) de problèmes « ressemblants »
 - Multi-présentation : Julo 1996 , Nguala 2009
 - Plus loin de nous les problèmes à variations : en Chine Cai & Nie 2007; Sun 2011; Bartolini-Bussi 2011 (*conférence de consensus 2012 sur Nombre*)

Multiprésentation (Ngujala 2009)

Un élève doit résoudre, dans l'ordre qu'il souhaite, trois problèmes « ressemblants » (structure, données numériques, syntaxe...)

(1) Léa empile des briques identiques d'un jeu de construction. Avec une brique, on obtient une hauteur de 13 cm.

Léa empile 52 briques. Quelle hauteur obtient-elle ?

(2) Pierre veut acheter des boîtes de chocolats dans une pâtisserie pour une fête. Chaque boîte de chocolats coûte 13 €.

Pierre achète 52 boîtes. Combien va-t-il payer ?

(3) Un jardinier a planté des rangées de salades dans son champ.

Chaque rangée compte 13 salades. Ce jardinier a planté 52 rangées de salades. Combien a-t-il planté de salades ?

Multiprésentation (Julo 1996)

L'EAU SUCREE

Pour faire une expérience de chimie, le professeur demande à des élèves de préparer de l'eau sucrée dans plusieurs récipients qui contiennent de l'eau.

| | |
|--------------------------------------|-------------|
| JACQUES a un récipient qui contient | 6 dl d'eau |
| PIERRE a un récipient qui contient | 10 dl d'eau |
| DIDIER a un récipient qui contient | 8 dl d'eau |
| ISABELLE a un récipient qui contient | 20 dl d'eau |
| BENOIT a un récipient qui contient | 16 dl d'eau |
| LAURENCE a un récipient qui contient | 6 dl d'eau |

Le professeur donne alors le sucre aux élèves et leur dit de s'arranger entre eux pour que l'eau soit aussi sucrée dans tous les récipients.

| | |
|---------------------------------|---------------|
| JACQUES met dans son récipient | 15 g de sucre |
| PIERRE met dans son récipient | 25 g de sucre |
| DIDIER met dans son récipient | 20 g de sucre |
| ISABELLE met dans son récipient | 50 g de sucre |
| BENOIT met dans son récipient | 35 g de sucre |
| LAURENCE met dans son récipient | 15 g de sucre |

L'eau sucrée,
La fusée,
Les crêpes

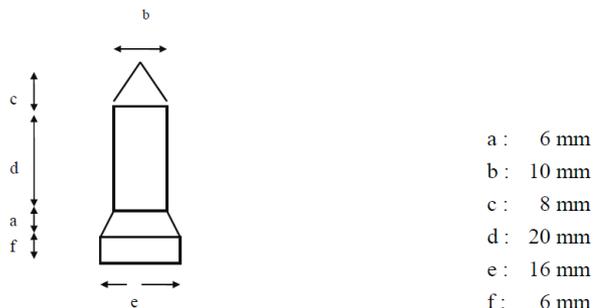
Mais l'expérience risque de ne pas marcher car un des élèves a fait une petite erreur : dans son récipient, l'eau n'est pas aussi sucrée que dans celui des autres élèves.

QUEL ELEVE S'EST TROMPE ?

QUELLE QUANTITE DE SUCRE AURAIT-IL DÛ METTRE ?

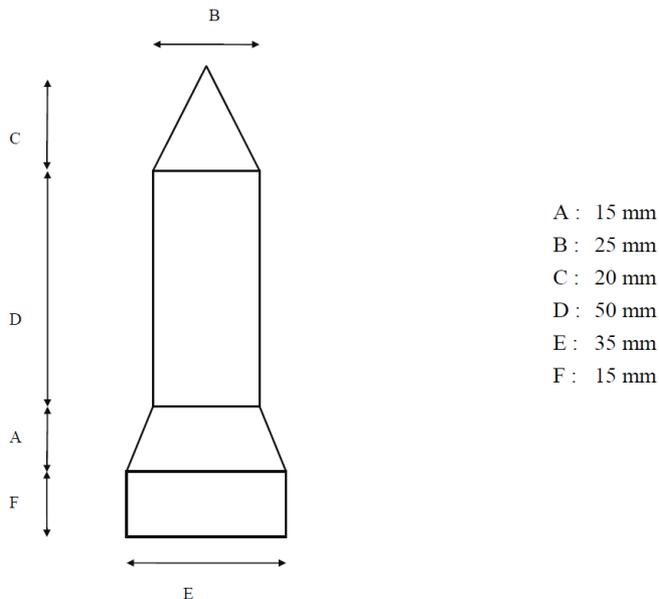
LA FUSEE

Le professeur de dessin a demandé aux élèves de reproduire en plus grand le dessin suivant :



- a : 6 mm
- b : 10 mm
- c : 8 mm
- d : 20 mm
- e : 16 mm
- f : 6 mm

Les élèves devaient donc dessiner exactement la même fusée mais en plus grand. Aussi, Patrick risque de ne pas avoir une très bonne note car il a fait une erreur : la fusée qu'il a dessinée n'est pas exactement la même que le modèle en plus grand. Voici son dessin :



- A : 15 mm
- B : 25 mm
- C : 20 mm
- D : 50 mm
- E : 35 mm
- F : 15 mm

POUR QUELLE LONGUEUR PATRICK S'EST-IL TROMPE ?
(tu indiques la lettre qui la désigne sur le dessin)

QUELLE AURAIT DÛ ÊTRE CETTE LONGUEUR ?

LES CREPES

Pour la Chandeleur, quelques élèves d'une classe décident de préparer des crêpes. Ils trouvent la recette suivante dans un livre de cuisine :

"Pour quatre personnes, préparez une pâte avec :
6 oeufs,
10 cuillerées à soupe de farine,
8 verres de lait,
20 g de beurre,
16 g de sucre ordinaire,
6 cuillerées à café de sucre vanillé"

Mais comme ils sont nombreux, ils décident d'augmenter les quantités qui sont indiquées dans la recette. Ils préparent une pâte avec :

15 oeufs,
25 cuillerées à soupe de farine,
20 verres de lait,
50 g de beurre,
35 g de sucre ordinaire,
15 cuillerées à café de sucre vanillé.

Les crêpes risquent donc de ne pas être très bonnes car les élèves ont fait une petite erreur ; ils n'ont pas respecté exactement la recette.

POUR QUEL PRODUIT LES ELEVES SE SONT-IL TROMPES

QUELLE QUANTITE DE CE PRODUIT AURAIENT-ILS DÛ METTRE POUR RESPECTER LA RECETTE DU LIVRE DE CUISINE ?

Des incontournables

- Un travail sur les reformulations
- Un travail en décroché sur les transformations d'écritures
- Un travail en décroché sur le calcul mental et le calcul en ligne

VALABLE CYCLE 3 POUR TOUS LES PROBLÈMES ADDITIFS
ET POUR TOUS LES PROBLÈMES
MULTIPLICATIFS

Enjeu : que l'élève sache reformuler.....

Ex 1 « *Il faut faire 57 plus quelque chose égale 126* »

En l'écriture de $57 + \square = 126$

ET

une recherche par approximation : par exemple l'élève essaie 50, trouve 107, recommence avec 60, puis ajuste..

OU

La transformation en $126 - 57 = \square$ ou $\square = 126 - 57$

Ex 2 *Pour 186 voitures à ranger par cartons de 6 :*

« *j'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* »

En l'écriture de $6 \times \square = 186$

ET une recherche par approximation : par exemple l'élève essaie 6×15 , trouve 90 ; continue d'essayer.

OU la transformation en $186 : 6 = \square$

EXEMPLES DE JEUX D'ÉCRITURES LIÉS AUX PROBLÈMES ADDITIFS / SOUSTRACTIFS

| | |
|----|---|
| 10 | 5 |
| 15 | |

| | |
|----|----|
| 5 | 17 |
| 22 | |

| | |
|----|----|
| 23 | 18 |
| 41 | |

| | |
|----|----|
| 12 | 26 |
| | |

| | |
|----|--|
| 14 | |
| 23 | |

| | |
|----|----|
| | 25 |
| 42 | |

Les écritures en ligne associées

$10+5=15$

$17+5=22$

$5+10=15$

$5+17=22$

$15-10=5$

$22-17=5$

$15-5=10$

$22-5=17$

Le projet : savoir transformer, à l'occasion
d'un problème

$56 + \square = 184$

en

$184 - 56 = \square$

ou

$\square = 184 - 56$

ORGANISER : VERS UNE TYPOLOGIE DES PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES (Houdement 2017)

Problèmes « complexes »

Un exemple

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Problème utilisé par un enseignant : ERMEL (1997 ; 2005)
Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1.
Paris :Hatier

Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance.

A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants.

A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.

La recette de la journée est 542€

Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

« **problème complexe** » un problème qui est

- un composé de problèmes basiques « cachés »....
- à construire par l'élève !

| Sous problèmes calculables | Sous problèmes utiles |
|--|--|
| Séance du soir : nombre de personnes Séance du soir : prix que payent les adultes Séance du soir : prix que payent les enfants Séance de l'après midi : prix que payent les adultes Deux séances : prix que payent les adultes | Recette de la séance du soir OU Recette venant des adultes ET Séance du soir : prix que payent les enfants |

Sur le problème

Au cinéma « royal ciné » un adulte paye **6€ par séance** et un enfant paye **4€ par séance**. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait **15 adultes et 20 enfants**. La recette de la journée est 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Elève de CM1 bah là j'ai essayé de faire / parce que un adulte c'est 6€ et un seul enfant 4€/ un adulte c'est 6€ **donc j'ai fait 15 fois 6, 90** / ensuite il y avait 20 enfants à la séance / comme c'était 4€ **j'ai fait 20 fois 4, 80** / euh/ il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6, **300** / et là il demandait combien il y a d'enfants à cette séance / donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542 / j'ai trouvé la recette de la journée / **j'ai trouvé 72 enfants**

L'élève a exécuté correctement des calculs utiles

Mais il a mal « qualifié » 72, le résultat du calcul.

72 n'est pas le nombre d'enfants, mais 72 € est le prix payé par les enfants !

Problèmes « complexes »

Résoudre un « problème complexe » nécessite de :

- **Connecter** (Bednarz & Janvier 1996) des informations pour construire des sous-problèmes **calculables** (souvent basiques)
- utiles pour avancer vers la réponse (en jeu la représentation du problème)
- **Qualifier** les résultats intermédiaires :
 - Ajouter l'unité ?? euros , ?? parts de gâteau
 - Ajouter la relation avec le texte du problème : *prix d'achat des ingrédients, prix de vente espéré pour les gâteaux....*
- **Et être conscient qu'il faut qualifier**

Une typologie pour aider à penser..

- Problèmes « **basiques** »

Enjeu élève : les mémoriser, les reconnaître dans des contextes différents

- Problèmes « **complexes** »

Enjeu élève : construire des sous-problèmes basiques calculables en connectant des informations, et qualifiant les résultats

- Problèmes **a-typiques**.....

Enjeu élève : mise en fonctionnement de connaissances; inventivité stratégique et sémiotique ;, flexibilité de raisonnement ; persévérance et confiance en soi : confrontation à l'autre ,

Construction de la représentation

En conclusion

Différentes facettes du travail lié à la résolution de problèmes arithmétiques

1. Travail premier sur problèmes arithmétiques basiques
2. Travail sur lecture compréhension : une question de langue, mais pas seulement
3. Aide à la construction de la représentation cognitive d'un problème
4. Travail sur schématisations personnelles, partagées
5. Travail de « qualification » d'un calcul effectué dans un problème
6. Connaissance des nombres et du calcul sur ces nombres
7. Travail décroché sur conversions / transformations d'écritures

Quelques références

- Brun J. (1999) La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives. *Math Ecole, 141*
- Cadet, E.R. (2018) Le rôle **du dessin** dans la résolution de problèmes arithmétiques verbaux. *Grand N, 101, 71-82*
- Coppé S. & Houdement C. (2002) Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N , 69. 53-32*
- Fagnant ; A. (2018) **Des illustrations** qui accompagnent les programmes à la construction des représentations schématiques par les élèves. *Actes sem nat ARDM*
- Feyfant, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ, 105*. Lyon : ENS de Lyon.
- Floch & Pfaff N. (2005) Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2: le cas des comparaisons de mesures. *Grand N, 75, 19-30*
- Hersant M. (2008) Problèmes pour chercher des conduites de classe spécifiques. *Grand N, 81, 57-76*.
- Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71, 7-23*
- Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 14, 31-60*.

- Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 15. 67-96
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100
- Julo, J (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes
- Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, 31-52.
- Levain J.P., Leborgne P., Simard A. (2006) Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie*; 155
- Mounier N. (2003) Les **schémas** dans la résolution de problèmes. *Grand N*, 71, 25-47
- Nguala J.B. (2005) La multi-présentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45-63.
- Thomas Y. (2007) Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N* , 80, 29-42
- Vergnaud (1997 ; reed 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Nathan
- Verschaffel L., Greer B. & de Corte E. (2000) *Making sense of word problems*. Lisse (Netherlands) : Swets & Zeitlinger Publishers

Des thèses

- Choquet-Pineau, C. (2014) *Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3*. Thèse Université de Nantes
- Georget, J.P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse de l'Université Paris Diderot.
- Nguala, J.B. (2009). *Multi-présentation de problèmes comme dispositif de réapprentissage au cycle 3 de l'école primaire. Mise en place, portée et limites*. Thèse. Université Paris Denis Diderot.
- Priolet M. (2008) *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique*. Thèse Université de Lyon 2.