Partie 1 : INTRODUCTION

Cadrage de la situation concernant l'enseignement des mathématiques.

- **Constats** :

1) L'importance des mathématiques dans nos sociétés à la fois pour soutenir les apprentissages (études) et à la fois sur le plan professionnel (outil de sélection à l'emploi). Cette dualité est source d'angoisse et d'anxiété relative aux mathématiques et se manifestent déjà à l'école maternelle. → Il est donc urgent de combattre cette anxiété de sorte que les élèves et les enseignants se sentent plus à l'aise avec ce champ disciplinaire. Ceci est un point qui joue un rôle important dans les apprentissages.

2) Les études et comparaisons internationales nous montrent que la France se situe dans la moyenne des pays de l'OCDE en mathématique mais elle a une caractéristique (pas seulement en math) qui est **l'existence de très grandes inégalités entre les élèves** et on ne les corrige pas tout au long du parcours scolaire (incapacité à les réduire). Il est important que tout le monde puisse acquérir les bases de ce champ disciplinaire.

3) Ces inégalités de performances de réussite en mathématique sont précoces (autant que celles qui peuvent être repérées pour le langage). La précocité entraine le souci de mettre en place le plus tôt possible (école maternelle, Cf. programme de 2015) des activités qui puissent être des sensibilisations, des moyens de rendre les activités mathématiques familières aux enfants de sorte qu'ils ne ressentent pas d'anxiété et se sentent à l'aise avec les « formalisations » qui arriveront à l'école élémentaire.

4) Les études conduites depuis une vingtaine d'années montrent que **les mathématiques ne sont pas une discipline homogène. Ce sont une mosaïque de capacités** plus ou moins juxtaposées et coordonnées. Ceci explique en partie une part des échecs des élèves et en même temps permet d'avoir des modalités d'intervention différentes en fonction de la diversité des enfants : l'individualisation des interventions va jouer un rôle très tôt.

- **Quelles sont les sources de difficultés en mathématiques ? Plusieurs domaines sont concernés :**

1) Des difficultés spécifiques de certaines activités mathématiques **(propre à la discipline)** comme le sens du nombre, le dénombrement, la résolution d'opération.

2) Les capacités générales de l'élève : le langage, l'attention, la mémoire de travail, la vitesse de traitement de l'information, les émotions (anxiété). Ainsi, certains enfants peuvent se trouver en difficulté ou en échec non pas parce que les activités mathématiques ou arithmétiques leur posent directement problème, mais parce que se sont d'autres capacités qui vont en cascade les provoquer.

3) A ce jour, nous savons peu de chose sur l'instruction dispensée très tôt au sein de la famille et de l'école : il sera fondamental de pouvoir étudier de manière empirique si certaines approches ou techniques sont plus efficaces que d'autres et si elles permettent à plus d'élèves de mieux réussir dans des apprentissages comme les opérations non posées (calcul mental), le dénombrement, la représentation des quantités… C'est dans cette direction qu'il faudra s'orienter si l'on veut parvenir à mieux individualiser les apprentissages, c'est-à-dire respecter des parcours différenciés pour aboutir aux mêmes objectifs.

- **Quels sont les objectifs de l'école ?**

Permettre la réussite pour tous : individualiser, gérer les apprentissages et les interventions. Pour cela :

1) Prévenir les échecs (mais non les obstacles) et l'anxiété : démarches adaptées, outils divers avec indications précises. Des travaux de recherches montrent combien il est important pour certains apprentissages à certains moments d'avoir, en amont, préparé par d'autres activités ces apprentissages. Si l'on veut prévenir les échecs alors, il faut susciter des sensibilisations, mettre en place des activités, préparer des apprentissages qui soient des apprentissages partiels, transitoires, probablement pas achevés mais qui permettent de constituer des étapes, des paliers pour atteindre un objectif plus élevé. Ceci est essentiel au cycle 1 et encore au cycle 2.

2) Traiter en temps réel les difficultés : aider à les surmonter, permettre de l'affronter et de la dépasser pour éviter que l'erreur se cristallise.

3) Remédier : les approches « classiques », même en répétant, en réinvestissant, ne parviennent pas toujours à lever certains obstacles. Il faut pouvoir les diagnostiquer assez tôt (CE1 – CE2) et mettre en place des activités complémentaires adaptées, voir faire appel à des professionnels spécialisés (rééducation).

- **Comment faire face ? Les modalités d'intervention.**

1) Enseigner formellement et explicitement (enseignement structuré et explicite avec feed-back) suivant une programmation ; pratiques traditionnelles du métier de l'enseignant.

2) Induire les savoirs et savoir-faire par le biais d'activités ludiques (plus ou moins) conçues de manière à contraindre les acquisitions de façon implicite. A l'école maternelle tout particulièrement, il est souhaitable de faire acquérir sans forcément formaliser ; cela suppose beaucoup d'activités très diversifiées mais qui doivent tout de même converger vers les mêmes objectifs et les mêmes apprentissages. Ces objectifs doivent être très clairs : que veut-on que les enfants apprennent ? Et pour qu'ils apprennent, même sans s'en rendre compte, quels types d'activités allons-nous privilégier ? Quels matériels allons-nous utiliser ? Quelles caractéristiques ce matériel peut-il avoir pour faciliter l'entrée dans l'apprentissage ? Quelles relations la situation d'apprentissage peut-elle avoir avec les situations familières des enfants ?

C'est la différence entre cycle 1 et cycle 2, on peut avoir des objectifs qui sont similaires mais les modalités des parcours d'apprentissages ne seront pas tout à fait les mêmes.

Partie 2 : CYCLE 1

Que savent les enfants à l'entrée en maternelle ?

Les enfants qui arrivent à l'entrée en cycle 1 ne sont pas des enfants « vierges ». Ils ont déjà dans le domaine de ce qui pourrait s'appeler une sorte **d'arithmétique intuitive** des acquisitions qui sont à la fois fondamentales comme base pour construire et en même temps qui présentent des insuffisances très fortes. Ils disposent de **3 grandes catégories de savoirs et savoir-faire** qui ne sont pas encore des mathématiques au sens véritable (ce qui constitue l'objectif des apprentissages).

1) La capacité de reconnaitre, discriminer, identifier visuellement les petites quantités (Subitizing) 1 à 3. C'est une habileté précoce (3 ans – 4 ans).

- ➔ Cela ne constitue pas la garantie d'une connaissance mathématique de base sur laquelle on peut s'appuyer (comprendre la quantité de référence).
- ➔ Cette capacité est associée aux capacités de mémoire à court terme visuelle.

2) La capacité de discriminer des grandeurs et quantités (exemple : comparaison de 2 quantités avec un ratio variable)

➔ C'est une capacité universelle qui ne dépend pas de la culture, mais plutôt en partie de l'âge de l'enfant (maturité).

➔ L'acuité de la discrimination (finesse avec laquelle les quantités sont discriminées) évolue avec l'âge. Elle va d'une capacité très grossière à une capacité fine à l'âge adulte.

IMPORTANT : Cette capacité est **un des prédicteurs** des capacités arithmétiques ultérieures de l'enfant.

Ce qui fait évoluer cette capacité de discrimination sont 3 facteurs :

- La maturation (l'imprécision diminue avec l'âge)
- L'éducation (l'imprécision diminue avec l'apport de l'éducation)
- Elle est améliorable par exercice : l'entrainement améliore la capacité de discrimination.

IMPORTANT : L'amélioration de cette capacité participe à l'amélioration des performances arithmétiques de l'enfant.

3) La capacité à utiliser les noms de nombres (pour compter, chanter, réciter…)

➔ Les enfants apprennent spontanément une partie de **la chaine verbale des nombres**.

Lorsqu'on observe leurs performances dans la connaissance de la chaine verbale des nombres à l'âge de 3 / 4 ans, on s'aperçoit qu'il existe :

- Une part stable et conventionnelle (1, 2, 3…).
- Une part stable et non conventionnelle (redites stables de noms de nombres dans le désordre).
- Une part ni stable ni conventionnelle (redites aléatoires et changeantes de noms de nombres dans le désordre).

➔ L'évolution de la partie stable et conventionnelle de la chaine verbale chez les enfants est très variable avec de grandes différences interindividuelles selon chacun. Ces différences sont encore plus accentuées selon l'environnement et la classe sociale de l'enfant mais elles peuvent être facilement éliminée par l'école (moins facilement lorsque l'enfant a des difficultés de langage ou des troubles liés à la maturation).

ATTENTION : comprendre les quantités et le nombre c'est autre chose que simplement être capable de réciter la suite des noms de nombres.

EN RESUME

A l'entrée à l'école maternelle les enfants ont des différences interindividuelles très importantes concernant ces 3 capacités :

- Discriminer des petits ensembles (petites quantités).
- Discriminer en comparant des « grandes » quantités, des grandeurs.

Reconnaissance de configurations visuelles

- Connaitre des noms de nombres et des chiffres.

Ce que les enfants ne savent pas à l'entrée en maternelle.

Ils ne savent pas :

➔ A quoi servent les nombres et les noms de nombres ;

➔ La relation entre la reconnaissance visuelle (subitizing) et le comptage d'une quantité est totalement dissociée.

➔ Dénombrer de manière précise.

➔ Relier les noms de nombres (ou les chiffres arabes) aux quantités. (Attention aux enfants qui ont un langage très développé, cela ne signifie pas que la capacité est mieux développée).

➔ Comment fonctionne le système numérique (composer, décomposer, recomposer).

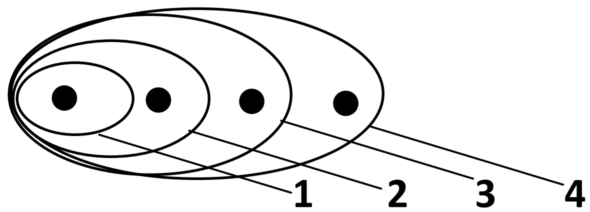
➔ Evoquer les quantités à partir du verbal ou des noms de nombres.

Tout cela, ils devront le découvrir et l'apprendre à l'école.

Les objectifs de l'école pour le cycle 1

Favoriser le passage d'**un traitement intuitif et approximatif** des grandeurs et quantités à **un traitement précis et conforme** aux contraintes culturelles de ces même grandeurs et quantités dont on attend qu'il soit en place à l'entrée à l'école élémentaire ou en fin de CP ; permettre aux enfants d'acquérir une plus grande précision dans l'évaluation d'une grandeur, d'une quantité ; mettre en place des activités spécifiques pour que les enfants comprennent ce que c'est une quantité précise ; mettre en place un système numérique verbal. Tout ceci constitue l'essentiel du cycle 1.

Ceci constitue un enjeu important au cycle 1 pour qu'à l'arrivée au CP, les élèves puissent passer à la numération avec le système en base 10. Ainsi au cycle 1, les élèves doivent acquérir la logique numérique, c'est-à-dire :



- L'emboitement (2 contient 1, 3 contient 2, 4 contient 3…)
- La relation d'ordre (4 est avant 5, 5 est avant 6, 6 avant 7….)
- L'itération de l'unité : n, n+1, (n+1) +1…
- L'égalité des distances entre successeurs (entre 7 et 8 c'est le même écart qu'entre 2 et 3).

Chacune de ces caractéristiques qui peuvent paraitre aller de soi, va devoir être enseignée.

Deux façons d'aborder le nombre au cycle 1

La première :

Elle n'a pas besoin du système numérique verbal ou des chiffres arabes : c'est la **Correspondance Terme à Terme (CTT)**, sans dénombrer.

2 ensembles ont le même cardinal lorsqu'on peut mettre une relation de correspondance de terme à terme entre les deux. Les activités peuvent se mettre en place très tôt et elles posent le problème spécifique de l'indépendance par rapport aux **caractéristiques perceptives** (formes, couleurs, tailles) des objets des collections. Pour les jeunes enfants, ce qui constitue une quantité est très dépendant des caractéristiques perceptives des objets, des collections. Ce problème nécessite tout le cycle 1 pour être pleinement surmonté.

Les élèves devront apprendre et comprendre que **la quantité est indépendante des caractéristiques perceptives**. Pour cela, il est important de mobiliser des situations différentes quotidiennement.

La deuxième :

C'est l'utilisation des systèmes numériques : **les noms de nombres**. Le cardinal peut s'obtenir par **dénombrement**, c'est-à-dire la correspondance entre noms de nombres (symboles) et les entités (objets).

ATTENTION aux spécificités de notre langue (onze, douze, treize…)

De la représentation analogique à la représentation verbale

Ici, 2 difficultés :

1) Pour catégoriser : la cardinalité devrait être indépendante par rapport aux caractéristiques perceptives des collections. Le nombre est une propriété des ensembles et non des objets. Cela n'est pas immédiat pour les enfants : reconnaitre l'équivalence numérique (le cardinal d'une quantité) indépendamment des caractéristiques perceptives : la forme, la couleur, la distribution spatiale, la taille, la surface occupée, le volume occupé…

2) Le langage code la quantité par l'ordre : 6 est plus grand que 5 puisque 6 vient après 5. Les enfants doivent apprendre à évoquer la quantité à partir de la succession des mots de nombres. Cela doit s'apprendre.

La notion de CARDINAL est abstraite

C'est une acquisition lente qui doit être associée à des expériences nombreuses et diverses, simples chez les plus jeunes et de plus en plus compliquées. Reconnaitre l'équivalence numérique (cardinal) sur de petites quantités (2, 3 et 4) chez les plus jeunes et jusqu'à 10 en fin de cycle 1 en variant les situations :

- Les entités se ressemblent (+ ou -)
- La disposition spatiale est (+ ou -) proche (place occupée, volume occupé)
- Les enfants connaissent la suite conventionnelle des noms de nombres (+ ou -) longue 1 à 4, puis 5, 6, 7…

Au cycle 1, il est important de construire des parcours d'apprentissages, de partir de situation qui sont empiriquement gérables pour les plus petits jusqu'à des situations plus complexes.

La Correspondance Terme à Terme (CTT)

Résultats d'études :

La mise en correspondance Terme à Terme de 2 collections pour des enfants de 3 ans et 4 ans sur des quantités n=3 ou 4 et n= 6 ou 7 nous montre qu'au-delà de n=4 la capacité est peu stable, inconstante. L'activité est encore bien moins réussie avec n=6 ou 7.

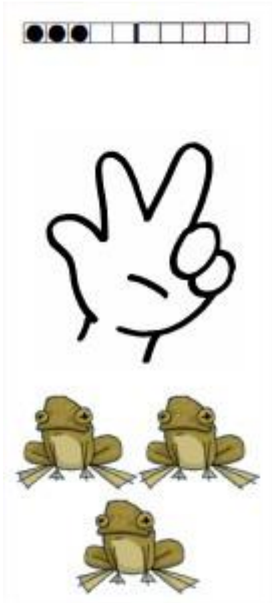
IMPORTANT : se limiter à 10 au cycle 1. Ce qui est attendu des enfants c'est que la connaissance soit très approfondie, sûre et bien maitrisée pour assurer les apprentissages ensuite.

Autres activités possibles : utiliser les doigts comme étant une sorte de transition entre l'abstraction numérique qui viendra après et le concret (les objets). Les doigts constituent ici une sorte de collection témoin (Cf. Rémi Brissiaud).

Différents codes analogiques

Ils conservent la représentation par des objets (avec des modalités perceptives différentes) pour présenter les mêmes quantités. Il est intéressant de se demander, au sein d'un même établissement scolaire, si les premières configurations analogiques peuvent être conservées tout au long du cursus de sorte qu'on puisse en faire autre chose. Par exemple : les réglettes pour la base 10, la frise numérique… peuvent devenir des outils pour les apprentissages mathématiques à suivre (cycle 2 et même cycle 3).





Il ne s'agit là que de représentations perceptives puisque l'objectif c'est le travail sur la correspondance terme à Terme.

La relation aux codes symboliques

L'importance des codes (noms de nombres, chiffres arabes). Ce ne sont pas les quantités qui posent problème ici mais leurs codages.

Les principales sources de difficultés sont :

- Le code
- La signification : c'est la relation entre 1 élément de ce code et la quantité à laquelle il renvoie.
- Sa vitesse d'accès : code --> quantité / quantité --> code. Cela doit se faire rapidement.
- Sa manipulation : pouvoir passer d'un codage à un autre (chiffres, représentations analogiques, noms de nombres).

Présentation d'une étude d'un peuple d'Amazonie les « Mundurukus » qui ne possèdent pas de système numérique verbal. Ils ont un et deux mais pas au-delà. Lorsqu'ils procèdent à des échanges, il y a des erreurs importantes au-delà de 3 éléments (75% de réussite ; 48% pour 4 éléments…). Ils parviennent difficilement à donner une quantité correcte correspondant à la demande (3 ou 4 ou 5…). Ils ont une relation de noms de nombres à la quantité qui est approximative. Après scolarisation pendant 1 an et cette imprécision a disparu.

Le comptage chez les 2 – 3 ans

➔ <u>Présentation d'une étude menée avec 44 enfants</u>

Le principe : imaginer nourrir un requin en lui donnant autant de poissons que ce qu'en donne le meneur du jeu (pas de noms de nombres prononcés dans cette activité). La courbe des résultats de l'étude montre des similitudes avec celle concernant le peuple d'Amazonie. Les taux de réussites sont environs 90% pour 1 poisson, moins de 80% pour 2 poissons, guère plus de 50% pour 3 poissons… avec des résultats rapidement très inégaux et faibles.

L'objectif à la maternelle sera de les conduire à une définition, une évaluation très précise des quantités par la correspondance terme à terme et le dénombrement.

➔ <u>Autre résultats d'une autre étude avec des enfants entre 2 ans ½ et 6 ans.</u>

Celle-ci illustre que leurs résultats et leurs réussites dépendent des quantités mais aussi de ce que l'on demande aux enfants :

- Montrer autant de doigts que de …
- Donner autant de … que de doigts.
- Dire combien il y a de … …/…

En d'autres termes, leurs réussites dépendent des quantités, des entités, des caractéristiques perceptives sur lesquelles on travaille, mais aussi des situations qui sont proposées et mises en œuvre. Il n'est donc pas nécessaire d'aller vite pour conduire les apprentissages. **L'objectif c'est que le nombre dès ses débuts soient parfaitement consolidé au niveau du cycle 1.**

La chaine verbale

➔ Présentation d'un diagramme en bâtons :

L'évolution de la numération verbale s'améliore de manière considérable entre la PS *(de 1 à 12 / 14)* et la fin de la GS *(jusqu'à approximativement 40).* Mais il y a de très grandes différences interindividuelles qui augmentent de manière très significative. Certaines sont associées à des milieux sociaux. Dans ce cas-là, il est possible d'obtenir des améliorations par le fait de mobiliser souvent, de créer des occasions d'activités. Il y aura d'autres différences interindividuelles qui vont résister et qui sont liées à des différences d'évolution de maturation (réussites plus précoces et importantes chez les filles que chez les garçons).

L'apprentissage du nombre

Cet apprentissage s'inscrit et doit **s'inscrire dans le temps**. Il s'effectue **en suivant un ordre**. On ne peut pas apprendre 2 avant 1, 3 avant 2, 4 avant 3… *L'acquisition du 1 se fait vers 2 ans ½ ; l'acquisition du 2 se fait vers 3 ans ½ ; l'acquisition du 3 vers 3 ans ½ 4 ans…*

Comprendre « 3 » signifie :

- Donner « 3 » quand on demande « 3 » ;
- Dire qu'il y a « 3 » quand on voit « 3 » ou que l'on présente « 3 »
- Ne pas donner une autre réponse dans chacune de ces situations.

Plus tard les enfants perçoivent la relation d'ajout d'une unité N ; N+1 ; (N+1)+1 entre les nombres qui se suivent. Mais cela est très lent et s'effectue progressivement tout au long du cycle 1 par l'entrainement et les interventions multiples dans des activités variées. A ce moment-là, ils savent déjà compter plus loin (chaine verbale jusqu'à 17, 18…) et ils ont compris ce qu'est 4, 5, 6. Lorsque l'enfant parvient à comprendre le nombre jusqu'à 5 ou 6 (relation code – quantité), ce serait une erreur de penser que ce qui est appris et acquis à un moment donné est généralisable sur les autres quantités plus grandes, et de penser également que s'ils savent que 4 est plus grand que 3, alors ils savent aussi et ont compris que 9 est plus grand que 8…. **La généralisation est lente** (associer le symbole à la quantité) **et elle exige beaucoup de manipulations.**

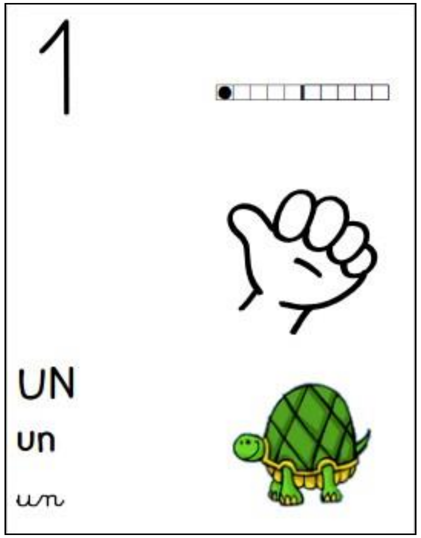
En RESUME

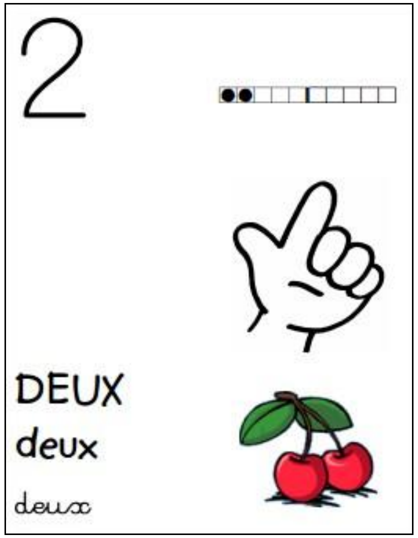
Au cycle 1 :

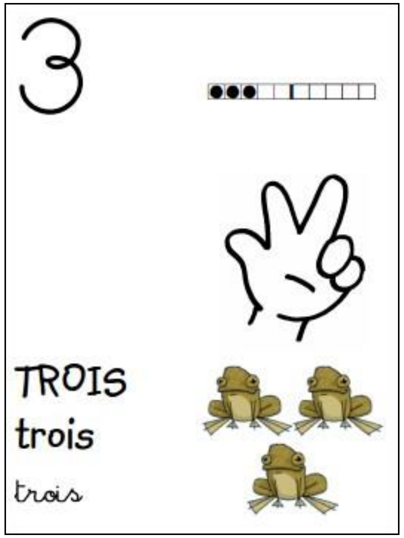
- Raffiner les capacités de comparaisons des grandeurs et des quantités.
- Etablir l'équivalence des quantités : correspondance terme à terme.
- Faire acquérir un ou des systèmes symboliques : noms de nombres, chiffres arabes *(au-delà de 20 c'est plus compliqué)*
- Associer les symboles aux quantités (et inversement) ce qui demande du temps.

Différents codes analogiques et symboliques

Les dispositifs de représentations vont peu à peu s'enrichir : ajouter aux codes analogiques de départ les codes symboliques (noms de nombres, chiffres arabes).







➔ Activités à conduire en classe : **appariement** ***Mots – Chiffres – Quantités*** :

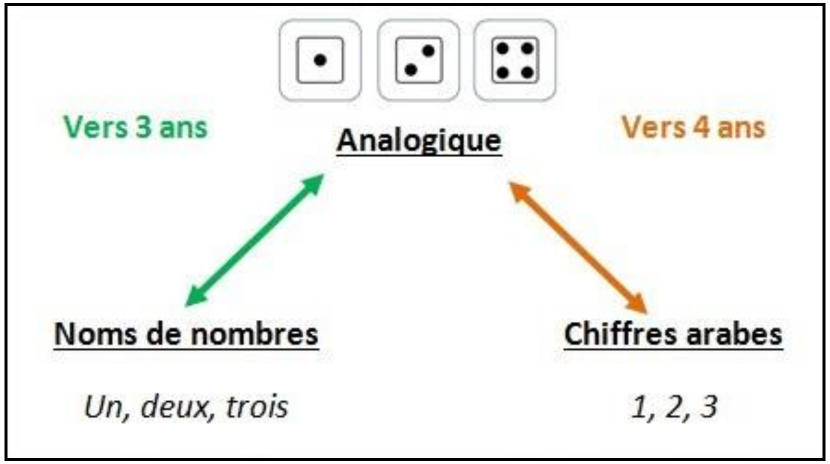
 ou  (ou objets divers à manipuler) à associer avec le nom du nombre et le chiffre qui lui correspond

1	5	4
3	2	6

Les relations entre l'utilisation des codes et l'âge de l'enfant

Le passage du code (noms de nombres) au code (chiffres arabes) se fait au cycle 1 par le recours à la quantité (code analogique). **Le transcodage passe au cycle 1 par la quantité.** Ceci est une question de maturité de l'enfant dont il nécessaire de tenir compte. Il est très difficile pour l'enfant au cycle 1 de passer directement des noms de nombres à sa correspondance en écriture chiffrée.

Transcodage en passant par la quantité →



Activités possibles à partir de petites quantités

En n'utilisant pas le code verbal, puis en l'utilisant mais recours à la quantité ou une représentation analogique de la quantité.

- Chercher des entités (pions, objets divers) dissimulées dans des boîtes opaques *(non verbal)* : *Dans la boite je mets cela. Puis encore cela. Recomposer ce qu'il y a dans la boite (autant que).*
- Comparer des ensembles hétérogènes (pions avec crayons…), *(non verbal).*
- Trouver le résultat d'ajouts ou de retraits *(non verbal ; puis verbal).*
- Déterminer si la Correspondance Terme à Terme permet de savoir « combien » (la quantité) sans compter : il y a autant de « M » que de « N » et il y a « N ». Combien de « M » ? *(non verbal puis verbal)*

Le passage du non verbal au verbal se fait avec les situations problèmes qui sont proposées aux enfants en réinvestissant les savoirs acquis.

Mémoire et transformation

Présentation d'une activité support à des recherches : La boite opaque.

Activité au cycle 1 avec des quantités subissant une transformation (ajouter, retirer). Pour cela, placer des jetons dans une boite opaque (boite à chaussures) devant les enfants. Ajouter ou retirer d'autres jetons devant eux. Ils voient chaque action menée. Puis l'enfant produit le résultat avec ses propres jetons. Vérification par la correspondance terme à terme (ou verbal plus tard). Quantité < 5.

Il est intéressant d'étudier les stratégies des enfants et de mettre les quantités en relation ou non avec les symboles (analogiques, symboliques…)

Résultats de cette étude :

La réussite des enfants à une situation de recherche d'une quantité **varient selon si la situation est réelle** *(matériel disponible et manipulable),* **évoquée** *(imaginer à partir d'un matériel non manipulable),* **formelle** *(absence de matériel, situation imaginaire).*

Les réussites des enfants baisses considérablement de 83% de réussites à seulement 15% pour le 3ème cas et baisse également lorsqu'on varie les quantités (d'abord 3 jetons puis 6 jetons). Il s'agit des mêmes dispositifs et des mêmes transformations dans les recherches.

➔ Il faut aller progressivement des quantités manipulées à des quantités évoquées puis à l'utilisation des symboles.

Les transformations : ajouter ou retirer

Il est important et utile d'inventer une grande diversité d'activités autour du nombre pour que sa formulation, ses relations aux codes (analogiques, symboliques), sa manipulation, sa décomposition, sa recomposition puissent se mettre en place progressivement.

Le dénombrement

Comment est-ce que les enfants parviennent à obtenir une évaluation d'une quantité précise ? L'outil qui est utilisé pour parvenir à cela c'est **le dénombrement**. C'est une activité qui pose problème à un certain nombre d'enfants. Il comporte des composantes dont chacune peut poser problème de manière spécifique.

- **La composante motrice** : qui peut être le **pointage** *(avec le doigt, souvent utiliser par les enfants)* et le pointage visuel, le mouvement des yeux. Ces deux pointages sont traités par la même zone cérébrale ce qui explique que les enfants dyspraxiques ont aussi des difficultés avec le mouvement des yeux et donc pour pointer et cibler sur le plan moteur ou visuel.

- **La composante symbolique** : les noms de nombres. Pour les enfants qui ont des difficultés sur le plan du langage, on peut utiliser les chiffres arabes, mais aussi la forme signée pour les malentendants (gestuelle).

- **La coordination** des deux composantes précédentes : elle peut représenter un possible coût qui s'ajoute aux coûts des deux autres composantes, notamment pour les enfants qui ont des troubles du langage ou une dyspraxie.

Dénombrer une procédure canonique

Comment se passe le dénombrement ?

- Pour dénombrer une quantité, on va pointer avec le doigt les entités et dénommer en même temps (1, 2, 3, 4…). Cela suppose que l'on établisse pendant le dénombrement une correspondance terme à terme entre le pointage et la dénomination, c'est-à-dire il faut **utiliser la correspondance terme à terme mais en acte.**

  IMPORTANT : il est conseillé de déplacer les éléments dénombrés et pointés pour éviter le comptage numérotage avec le risque de confusion important que cela suppose de revenir sur un élément de la collection déjà pointé une première fois.

- Il faut connaitre les noms de nombres dans l'ordre et que cet ordre soit stable et conventionnel.

- Il faut avoir compris que le dernier élément énoncé fournit la cardinalité.

Enfin 2 caractéristiques :

- On peut dénombrer même des collections hétérogènes, cela ne change pas la quantité.
- On peut dénombre dans n'importe quel ordre *(non pertinence de l'ordre de traitement des éléments de la collection*). Encore en CE1 et CE2, beaucoup d'enfants acceptent difficilement cela.

Performance en fin de GS maternelle

Présentation d'un tableau concernant les résultats d'une étude menée avec des enfants avant l'entrée au CP (fin GS) : niveaux de maitrise des enfants concernant :

- **L'ordre stable** des nombres (OS) = 62,5%
- **La correspondance Terme à terme** (CTT) = 95,3 %
- La cardinalité (C), le dernier élément désigné correspond au cardinal de la collection) = 65,7 %

Lorsqu'on cumule les caractéristiques, les moyennes baissent fortement :

- OS + CTT = 59,1 %
- OS + C = 43, 3 %
- CTT + C = 65, 7 %
- Les trois (OS + CTT + C) = 44, 2 %

A l'entrée au CP, les dénombrements qui dépassent 5, 6 sont des procédures qui doivent encore être travaillées. L'utilisation d'une marionnette qui effectue des dénombrements en faisant des erreurs en demandant aux élèves de les détecter et de les corriger est un moyen ludique de faire acquérir, de conforter ou consolider l'utilisation des techniques de dénombrement.

Ce que l'on peut attendre à la fin du cycle 1

Activités avec nombres de plus en plus grands :

- Reconnaitre, dénombrer, comparer, ordonner des collections puis les symboles correspondants **(jusqu'à 10).**
- Associer différentes représentations ; utiliser des collections témoins (doigts) puis des symboles.
- Dénombrer (dire combien il y a) et savoir donner « x » ; savoir associer des collections (quantités) aux symboles et inversement.
- Comparer, décomposer (1 et encore 1 et encore 1 et encore 1 c'est 4 ; 2 et encore 2 c'est 4)

- Résoudre des problèmes **en action** à partir de petites histoires, à partir de situations. Passage progressif au verbal.

Partie 3 : CYCLE 2

Des actions aux représentations d'actions puis aux traitements symboliques.

Introduction

Le cycle est abordé en traitant 3 grands sujets :

1) L'acquisition de la numération décimale (le système en base 10) : c'est un problème clé qui donne lieu à beaucoup d'erreurs. On trouve encore des élèves au collège (en classe de 6ème / 5ème) qui commettent des erreurs pour l'écriture des très grands nombre comme 150 009 ; 1 023 007…

« *C'est un apprentissage qui doit être conduit très soigneusement de façon à éviter les erreurs de lecture, d'écriture et d'interprétation des nombres puisque les enfants vont les utiliser pour les opérations. »*

- ➔ L'acquisition des codes de la numération orale puis écrite, leurs propriétés (relations code – quantité) et leurs apprentissages correspondants.
- ➔ Les difficultés propres à cet apprentissage qui relèvent de deux ordres : des mathématiques et des capacités générales de l'enfant.
- ➔ La numération dite de position (u d c) et ses difficultés.

2) La ligne numérique : son rôle s'étend du cycle 1 au cycle 3. *« C'est un outil intéressant à exploiter qui peut être conduit de la GS au collège pour donner une représentation homogène du nombre. »*

3) Les opérations non posées : de celles qui relèvent du calcul mental.

- ➔ Les opérations et leurs propriétés conceptuelles.
- ➔ Les procédures de résolution, les situations problèmes.
- ➔ La relation entre les opérations et les situations problèmes.

Les codes de la numération orale et écrite

L'acquisition des codes de la numération orale et écrite va présenter de nombreuses difficultés pour les enfants, surtout en CP lorsqu'ils vont être confrontés à soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix. Ils doivent apprendre la numération dite de position. Il faut pour cela accepter d'y passer du temps et faire beaucoup de manipulations. Ils vont devoir apprendre quelque chose qui est presque toujours oublié : **à quoi servent les opérations ?**

Les opérations servent à effectuer avec des symboles ce que l'on pourrait réaliser matériellement. Sauf qu'avec les symboles, nous sommes beaucoup plus libres dans la manipulation. Au final, lorsque l'on a les résultats, c'est comme si l'on avait eu les vraies manipulations, avec les vraies entités.

Aujourd'hui, nous vivons dans une société dans laquelle les références ont presque disparu ; ce sont les symboles que l'on manipule et la quantité de référence qu'ils représentent, nous ne l'avons plus. Nous vivons dans un monde où la manipulation des quantités est devenue très rare (tout est préparé, conditionné en quantités toutes prêtes dans les magasins sans plus avoir besoin de peser, compter, mesurer…)

- ➔ **Ce que doivent apprendre les enfants**, c'est que l'on peut **manipuler des symboles en ayant une correspondance avec les quantités**,
- ➔ Les opérations servent à utiliser et **combiner des symboles suivant des règles (addition, soustraction, multiplication**…) plutôt que de réaliser **des transformations (ajouter, enlever, partager)** portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles.
- ➔ Apprendre que la manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application des transformations,
- ➔ Découvrir la « liberté » relative de manipulation des symboles : les propriétés conceptuelles des opérations (inversion, commutativité…)

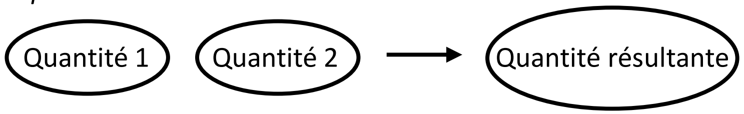
Les quantités et leur codage symbolique

Comment les opérations des enfants sur les relations des quantités et leurs codages évoluent dans le temps depuis le cycle 1 ?

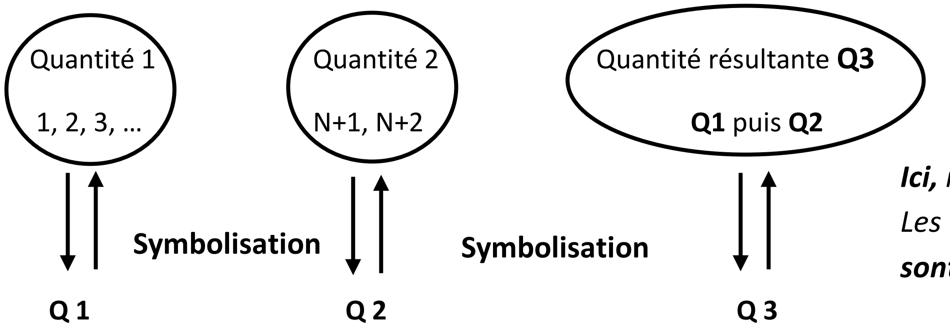
1) Les transformations au cycle 1 : réunion de 2 quantités et dénombrement de la quantité obtenue.

A 3 / 4 ans, les enfants parviennent à dénombrer une petite quantité et à associer une quantité à un code :

Pour trouver combien fait le tout, ils ne vont pas additionner. Ils vont réunir par manipulation les deux collections (quantités) pour aboutir à une **nouvelle quantité résultante** puis, dénombrer le tout : **« intuition primitive précoce ».** *La réunion (ou l'extraction) physique portant sur deux quantités (ou plus) aboutit à une nouvelle quantité résultante.*



2) Des transformations vers les opérations



Ici, *il y a symbolisation des quantités en jeux : Q1, Q2 puis Q3*
Les enfants agissent sur des entités, des objets réels ou imaginés. ***Ce sont encore des transformations.***

L'appariement de chaque ensemble avec un symbole permet d'aboutir à un nombre pour chaque quantité (Q1, Q2 et Q3). L'aboutissement est équivalent au parcours de Q1 puis de Q2 en un même dénombrement.
Nous leur ferons repérer également que Q1 et Q2 donne Q3 : leur faire percevoir que l'on pourrait passer non pas par la manipulation mais travailler avec les symboles. L'idée de faire des « calculs » n'est pas dans un premier temps dans leur zone proximale de développement (ZPD). Cela va se s'élaborer et s'installer progressivement.

Quantité 1 — 1, 2, 3, …
Quantité 2 — N+1, N+2
Quantité résultante **Q3** — **Q1** puis **Q2**

Symbolisation Symbolisation

Q 1 **Q 2** **Q 3**

***Ici**, les enfants commencent à agir avec les symboles (qui représentent des petites quantités). **C'est le passage vers les opérations.** Agir sur des objets réels est encore utile et même nécessaire pour manipuler de grandes quantités.*

Progressivement, passage de Q1 puis Q2 à Q1 +1, +2, +3… jusqu'à Q3. Puis commencer par le plus grand des deux. Ils vont pouvoir commencer à travailler sur les symboles eux-mêmes.

3) Les opérations (au cycle 2 vers le début CE2)

Les élèves vont être capables de travailler sur les symboles sans avoir besoin de se référer aux quantités qu'ils représentent (à la fin du traitement des entiers naturels).

Symbolisation Symbolisation

Q 1 **+** **Q 2** **=** **Q 3**

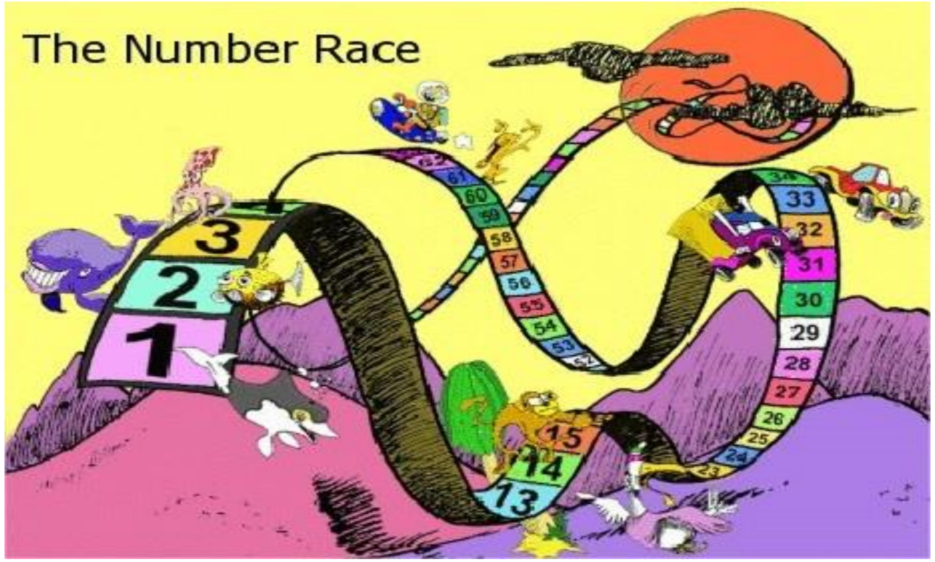
Ici**, les enfants agissent avec les symboles qui représentent les quantités : **ce sont les opérations.

Puis commencer par le plus grand des deux **Q1 + Q2 = Q2 + Q1** Compostions et décompositions, commutativité de l'addition… les propriétés conceptuelles des opérations.

- ➔ Le cycle 2 va se caractériser par un saut dans l'abstraction qui ne va pas se porter seulement sur le fait que l'on peut se passer des quantités mais aussi sur le fait que l'on peut manipuler des symboles au lieu de manipuler des entités.
- ➔ Il faudrait qu'à la fin du cycle 2, les enfants aient réalisé le caractère abstrait des opérations parce qu'ils vont affronter les nombres décimaux et les fractions. Cela suppose que la notion de nombres soit devenue abstraite et qu'ils soient manipulables mentalement.

Présentation d'outils

➔ Le logiciel informatique : « **LA COURSE au NOMBRE** »



Qu'est-ce que La Course aux Nombre ?

C'est un logiciel de jeu qui vous fait jongler avec les nombres et enseigne les concepts fondamentaux de l'arithmétique :

Présentation des nombres – ensembles concrets, chiffres ou mots - Comptage – Entraînement avec les nombres de ***1 à 40*** – Calculs élémentaires – additions et soustractions.

Ce jeu est destiné aux enfants de 4 à 8 ans (cycle 1 & 2). Le jeu s'adresse tout particulièrement aux enfants qui éprouvent des difficultés en maths (dyscalculie). Il les aidera à renforcer leurs circuits cérébraux de représentation et de manipulation des nombres.

Jeu gratuit téléchargeable à l'adresse suivante :
http://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php

➔ Le logiciel informatique : « **L'ATTRAPE-NOMBRES »**

Jeu : L'attrape-Nombres

Pour les enfants plus à l'aise avec les petits nombres, il y a le jeu l'Attrape-Nombres qui est très bien fait pour aborder les compléments à 5, les compléments à 10, les calculs additifs, calculs soustractifs... Une progression dans le jeu qui favorise aussi les différents codages analogique, symboliques.

2 niveaux de jeu : Standard / Expert

Jeu libre en ligne à l'adresse suivante :
http://www.attrape-nombres.com/an/nc_play.php?lang=fr

L'apprentissage du code indo-arabe et le transcodage :

L'objectif du cycle 2 c'est parvenir à « opérer sur les symboles » en utilisant des algorithmes que les élèves vont découvrir puis apprendre à utiliser. Cela signifie que qu'ils doivent apprendre à manipuler les symboles et avant cela apprendre le code lui-même. L'apprentissage du code est particulièrement difficile en français avec les particularités de notre chaine verbale : onze, douze, treize, quatorze… soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix.

Apprendre le code indo-arabe signifie :

- Apprendre les noms de nombres.
- Se représenter les quantités.
- Associer les quantités aux nomes de nombres.

IMPORTANT : se donner du temps au cycle 2 pour proposer un grand nombre d'activités concernant l'apprentissage du code.

➔ **Les propriétés du code indo-arabe :**

- Un système simple par son nombre restreint d'éléments : 10 chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
- La notation positionnelle (la valeur dépend de la position du chiffre dans l'écriture 1 ; 10 ; 100 ; 1 000). On observe fréquemment des erreurs de positions dans l'écriture chiffrée des nombres au cycle 2 (ex : 201/210)
- Le transcodage de l'oral à l'écrit peut induire des erreurs caractéristiques en français 6012 pour 72, 42016 pour 96
- La suite verbale des noms de nombres est irrégulière : à la fois « non transparente » seulement à partir de dix-sept *(onze, douze, treize…)* ; puis peu transparente avec *(vingt, trente, quarante…)* mais aussi *(soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix).*
- L'utilisation d'un matériel en base 10 pour manipuler et modéliser est importante au cycle 2.

Le transcodage

Le **transcodage** est le traitement des chiffres et des mots de nombres. Il y a en français la **formulation verbale** *(quatre, six),* il y a une **formulation chiffrée** qui est universelle (4, 6). Elles sont toutes deux indépendantes et chacune relève d'une zone cérébrale distincte.

Chez les jeunes enfants, nous l'avons vu pour le cycle 1, le passage du verbal (noms de nombres) au code indo-arabe (le chiffre) transite par la représentation des quantités. En revanche, plus tard et vers le Cp / Ce1, le traitement se fait directement et ne passe plus par la quantité. La capacité de transcodage dépend de la facilité d'appariement entre le code verbal et le code indo-arabe :

Représentation verbale	Représentation indo-arabe
Douze	**12**

Le transcodage en fin de CE1

Que se passe-t-il quand on remet dans des nombres de + en + grands des dizaines complexes (70 / 90) qui constituent souvent un obstacle pour le transcodage ? Les performances sont-elles les mêmes qu'avec d'autres nombres ?
Résultats d'une étude menée avec 192 enfants avec des nombres comportant :

- Des dizaines simples D : 20, 30, 60
- Des dizaines complexes DC : 70, 80, 90
- Des dizaines unités DU : 41, 57
- Des dizaines complexes unités DCU : 76, 83
- Des centaines dizaines unités CDU : 312, 749
- Des centaines dizaines complexes unités CDCU : 481, 293

➔ Les performances avec les nombres qui ne comportent que des dizaines simples baissent légèrement avec les nombres de plus en plus grands.
➔ Les performances avec les nombres qui comportent des dizaines complexes sont très nettement plus faibles avec un écart qui tend à augmenter avec de grands nombres.

➔ **Transcodage et dictée de nombre :**

Pourquoi est-ce si compliqué de transcrire des noms de nombres en passant de l'oral au chiffres indo-arabes ?
<u>Paradoxe de la langue française</u> : il n'y a pas de correspondance entre la difficulté en chiffre (du nombre) et la difficulté en langage et de mémoire quand on prononce le nombre. Ex : 1002 (grand nombre en math et 2 syllabes en français) 98 (plus petit nombre en math mais 5 syllabes en français).

- Présentation d'une étude menée avec des enfants de <u>niveau CE2</u> à partir de dictée de nombre de 4 à 6 syllabes avec des ressemblances sur le plan des sonorités phonologiques (ex 1117, 7160, 5617...)

Le nombre d'erreurs augmente considérablement avec des nombres à 5 et 6 syllabes et elles sont encore plus fréquentes quand les mots qui constituent le nombre comportent des ressemblances. **Cela illustre une difficulté importante du transcodage qui relève de la mémoire et du langage.**

Les erreurs de transcription sous dictée ou de lecture sont des erreurs qui sont associées à la prononciation des noms de nombres, au fait de pouvoir les maintenir dans sa mémoire.

- Quand c'est la longueur du nom de nombre qui pose problème, les erreurs sont un problème de transcription du zéro (où le mettre)
- Quand les mots se ressemblent, les erreurs sont des erreurs de chiffres (placement, inversion, confusion avec un autre…)

Les inductions d'erreurs sont variables :

- La ressemblance de phonèmes c'est le langage
- La longueur du nom du nombre c'est la mémoire.

➔ **Que faire ?**

- Maintenir la configuration verbale en mémoire : faire répéter les noms de nombres avant de demander aux élèves de les transcrire.
- Déterminer le nombre de chiffres pour écrire le nombre dicté (2410 --> 4 chiffres), avec repérage de mots indices (cent, mille), repérage de l'ordre des mots et leur correspondance avec leur position dans l'écriture chiffrée…
- Développer la capacité de contrôle ultérieur (relecture corrective)

Avec une analyse des sources d'erreurs on découvre que les erreurs interprétées comme étant liées à l'arithmétique sont en fait des erreurs liées à des questions de langage et de mémoire.
Avec un entrainement qui cible ces difficultés, il est possible de faire diminuer considérablement les erreurs chez les élèves.

Le transcodage présente un risque de difficultés considérable. **Il est très important d'associer et d'utiliser un matériel qui illustre clairement la base 10** (illustrer l'unité, 10x1 ; 10 x10 ; 10x100) avec cet apprentissage et cela jusqu'à la fin du cycle 2 (fin CE2). Un raisonnement peut être mené au sein d'un groupe scolaire pour qu'un tel matériel puisse être utilisé de manière continue de la GS jusqu'au cycle 3 (CM1) avec les mesures de longueur, de masse…

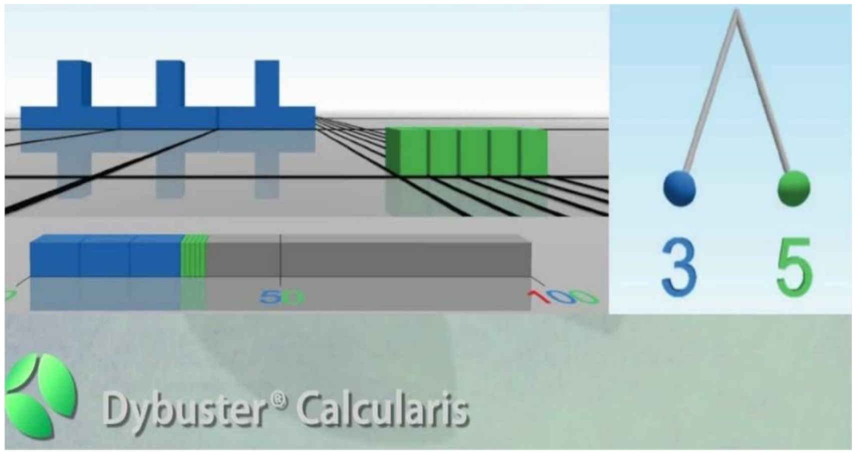
Le matériel en base 10

Il est important d'utiliser un matériel qui aidera à illustrer et construire le sens. Il s'agit là d'un matériel :

- Qui illustre la base 10
- Qui illustre le transcodage et permet de l'apprendre.
- Qui met en relation la position et le code
- Qui illustre comment on va réaliser les opérations posées.

Présentation du logiciel « Calcularis » qui propose des exercices d'entrainement au mathématiques avec des représentations des nombres selon 3 des modalités différentes : écriture chiffrée ; représentation avec des avec réglettes 3D en base 10…

Pour en savoir plus : http://dybuster.com/fr/calcularis *logiciel payant (essai gratuit)*



La ligne numérique :
Importance de l'unité

Pourquoi est-elle un outil important ? 0 ________ 100 *où placer **28** ?*

(ici, 100 est un indicateur variable selon le niveau de classe)

- ➔ La ligne numérique est directement en lien avec le concept de nombre et sa représentation mentale.
- ➔ Elle est à la fois un outil d'évaluation très simple de la représentation du nombre.
- ➔ Elle est aussi un outil d'intervention et d'aide pour améliorer les performances ultérieures en mathématiques (exemple : jeu de plateau avec « frise numérique » avec des cases qui respectent justement l'organisation de l'itération de l'unité (cases régulières et d'égales proportions).
- ➔ Elle va donner une idée de la précision avec laquelle ils sont capables d'associer une représentation spatiale avec les nombres ; si l'enfant a une représentation du nombre qui respecte l'itération de l'unité : N, N+1, (N+1)+1… Si tel est le cas, ils vont respecter le principe qu'entre les nombres successifs, la différence est toujours de 1, c'est-à-dire : on doit avoir la même distance entre 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5…

Présentation des résultats d'une étude menée avec des enfants de GS : évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique (une quantité en rapport à la position d'un nombre illustrant cette quantité sur une ligne numérique.

- Les premières quantités sont très distendues : les enfants placent de grands espaces entre 1 et 2 et entre 2 et 3. Au contraire entre 7 et 8 ; 8 et 9, l'espace devient tout petit.
- La même épreuve en CP montre que l'organisation de l'itération du nombre se met en place de manière plus fine avec des écarts moindres entre les nombres.
- Au CE1, les enfants ont une représentation linéarisée qui respect l'organisation de l'itération de 1 (il y a la même distance entre 16 et 17, 78 et 79, 53 et 54…)

Des travaux de recherches nous montrent que **la représentation linéaire des nombres se trouve corrélée aux performances mathématiques des enfants**. La ligne numérique est un outil simple et mobilisable de la GS à la 6$^{\text{ème}}$ et qui permet de donner une idée homogène de ce qu'est la notion de nombre. On peut utiliser la ligne numérique pour positionner et ordonner des nombres, pour représenter une procédure de résolution d'une opération non posée (calcul mental)…

IMPORTANT : plus les enfants se rapprochent de cette représentation linéaire et régulière du nombre et plus leurs performances aux opérations, aux représentations du nombre et de la quantité, à la compréhension du maniement des quantités, s'améliorent.
La ligne numérique est donc un moyen d'améliorer les performances ultérieures en mathématiques des élèves sans intervenir directement.

Les opérations non posées (calcul mental)

Avec les opérations, les enfants se mettent à manipuler des symboles d'une manière qui n'a pas forcément de correspondant avec ce que l'on pourrait faire avec les entités : commutation, regroupement, décomposition… Ils vont donc **décoller du sens**, manipuler des symboles au-delà de ce qu'ils représentent.
Le risque est que la manipulation se fasse sans compréhension. S'il l'enfant ne suit pas les règles des algorithmes de manière très précises, alors il va se tromper.

L'avantage, c'est que les symboles facilitent les calculs, le raisonnement qui ne pourrait pas se faire avec cette « liberté » avec des entités à manipuler.

➔ **La difficulté pour l'enseignement au cycle 2** mais aussi au cycle 3, sera de conduire les enfants **à comprendre pourquoi on manipule de telle ou telle manière ?** Pourquoi on peut faire certaines choses ? Mais en même temps, il va falloir leur permettre de s'exercer suffisamment pour qu'ils réalisent les algorithmes sans se tromper. A ce stade, l'enseignant cours 2 risques :
  - Ils n'ont pas compris la relation entre la manipulation symbolique et les référents (perte de sens, absence de raisonnement cohérent)
  - Penser qu'une fois l'explication donnée, ils sauront s'entrainer tout seul. Au contraire, il est nécessaire d'intervenir souvent, longtemps, en veillant à ce qu'à chaque fois que nous avançons, les avancés remobilisent ce qui a été appris.

Les opérations : 4 dimensions

Les situations : dans un premier temps les opérations sont très dépendantes des situations présentées. Il y a une relation entre les situations problèmes et les opérations qui sont à réaliser. Puis dans un second temps, l'indépendance est croissante pour arriver à des situations faisant appel à une plus grande variété d'opérations disponibles et mobilisables.

Les procédures : la question au départ est la suivante : comment est-ce que les enfants font ? Comment est-ce que l'on veut qu'ils fassent ? Les procédures de résolution, il en existe beaucoup mais celle qui ont été élaborées présentent **l'économie maximale**. L'objectif est donc de permettre aux enfants de les découvrir et qu'ils parviennent à les réinvestir efficacement par la suite. Les procédures sont élaborées par les enfants (procédures personnelles) puis découvertes (élargissement à d'autres procédures) puis enseignées (algorithmes).

Les faits dits arithmétiques : ils doivent mémoriser des faits (table d'addition, de multiplication, doubles, moitiés…) Il y a des enfants qui n'arrivent pas à les mémoriser : ceux qui ont des difficultés de langage et ceux qui ont des problèmes de mémoire avec une grande sensibilité aux interférences.
Il ne faut pas interpréter la difficulté comme étant ou relevant des mathématiques mais envisager aussi que cela puisse avoir un rapport avec les difficultés de langage, de représentation des quantités…

Les propriétés : il est important de bien connaitre les propriétés conceptuelles des opérations pour parvenir à les utiliser : commutativité, associativité, inversion…

Les procédures des enfants

Des plus jeunes au plus grands.

1) Les plus jeunes font une **transformation** (réunir les 2 collections) et utilisent le dénombrement pour trouver le total.

2) Un peu plus tard, vers 5 ans, ils vont partir de la 1ère collection puis ils vont ajouter la 2ème avec les doigts (substituts analogiques).

- Là les objets sont présents, et l'enfant est **encore « victime / dépendant » de la présentation**, de l'ordre dans lequel les données sont présentées.
- Puis, ils vont modifier l'ordre de la situation et commencer par la quantité la plus grande avec l'aide des doigts ; c'est **l'ordre de traitement :** (à 4 j'ajoute 2 et non plus à 2 j'ajoute 4).

3) **L'ordre de traitement** est moins dépendant de la situation et par rapport à l'ordre de présentation : $a + b = b + a$ Utilisation « intuitive » de propriétés des opérations.

Est-ce qu'ils vont généraliser ? NON. Pour faire cela, il faudra passer par une étape de réflexion sur la manière dont on peut procéder et pourquoi une procédure est plus économique.

➔ **Schéma d'évolution :**

- Ils vont compter d'abord, dénombrer les objets.
- Ils vont utiliser les doigts (substituts analogiques)
- Ils vont compter mentalement en respectant **l'ordre de présentation**, puis en utilisant **un ordre de traitement** (découverte de la commutativité).
- Ils vont retrouver directement en mémoire verbale le résultat d'une association de petites quantités (2 et 2 --> 4 ; 3 et 2 --> 5).
- Ils vont décomposer le problème à résoudre ; c'est ici du calcul mental (7 + 5 --> 7 + 3 + 2) qui sera mis en place si l'enfant pratique régulièrement ce type d'activité de recherche et si les procédures plus économiques sont enseignées.

Dans tous les cas, les performances des enfants varient en fonction : de la taille des nombres, de la modalité de présentation de la situation, de la situation décrite elle-même, du matériel disponible ou pas…

Présentation d'une étude concernant les « grandes opérations » *(en calcul mental, additions et soustractions dont les résultats sont compris entre 0 et 20).* Dans les maths, il y a une part d'apprentissage par cœur qui peut être induite par des apprentissages de tables (add / mult) mais aussi qui peut être induite et confortée par des activités plus complexes dans lesquelles ces opérations sont mobilisées. Les enfants n'ont aucune raison d'utiliser ces résultats (surtout ceux compris entre 10 et 20 comme 7 + 6 ; 9 + 5) si on ne les mobilise pas. Ces grands résultats seront ceux qui risquent de leur faire défaut plus tard lorsqu'ils auront à traiter des opérations plus complexes.

Stratégies de résolution (calcul mental)

Présentation des résultats d'une recherche à partir l'exemple suivant : s'interroger sur la manière de résoudre 46 + 23

Pour résoudre une opération en lien à une situation problème, les élèves doivent avoir recours à des connaissances conceptuelles des opérations. Pour cela ils doivent les découvrir, s'entrainer à les utiliser puis parvenir à trouver celle qui sera la plus efficace, la plus économique selon la situation donnée. L'étude montre qu'entre le CE1 et le CM1 peut d'élève connaissent les propriétés des opérations, de manière suffisante pour les exploiter. Les résultats montrent qu'entre le CE1 et le CM1 il n'y a pas d'amélioration de ces résultats. Autrement dit, l'utilisation des connaissances conceptuelles liées aux opérations est trop peu travaillée en classe.

Cf. le document de l'académie de Lyon sur les propriétés des opérations avec quelques pistes d'exploitation en classe (d'après Roland CHARNAY)
http://www2.ac-lyon.fr/etab/ien/loire/montbrison/IMG/pdf/proprietes.pdf

Les connaissances conceptuelles liées aux opérations

La **commutativité** de l'addition et de la multiplication a + b = b + a / a x b = b x a mais pas de la soustraction ni de la division.

La **relation inverse** entre addition et soustraction : a + b = c --> c – a = b Idem entre la multiplication et la division : a x b = c --> c / b = a

L'associativité entre l'addition et la soustraction (a + b) – c = a + (b – c) mais pas entre la soustraction et la multiplication.

Ces connaissances permettent de comprendre des techniques usuelles du calcul mental et du calcul posé. Lorsque les opérations (addition et soustraction) et les écritures symboliques (5 + 3 = 8) sont présentées à priori, c'est-à-dire en dehors de toute résolution de problème qui viendrait ensuite, les élèves peuvent difficilement leur donner du sens.

L'introduction des signes ne peut se faire que lorsque les élèves possèdent déjà les mots pour dire leur pensée.
Certaines propriétés ne peuvent pas être représentées par des écritures mathématiques. Il faudra passer par des manipulations, des schémas.
Plus les élèves bénéficient d''entrainement, de la répétition d'activités sur les nombres en utilisant les propriétés des opérations, plus les techniques opératoires prennent du sens pour eux.

IMPORTANT : Ce qui est problématique pour les élèves, ce n'est pas tant la capacité de conception de l'opération que le repérage des situations sur lesquelles ils peuvent mobiliser ces propriétés.

Partie 4 : CONCLUSION

Il y a deux grandes dimensions très différentes sur lesquelles il faut prêter attention :

Une dimension spécifiquement mathématique :
Il y a ce qui est l'objet de l'apprentissage : les mathématiques. Elles ont un poids de plus en plus important. Elles sont très précocement impliquées et c'est le sens des nouveaux programmes. Elles sont améliorables précocement sur le plan verbal et sur le plan de manipulation à condition de consolider et ne pas chercher à aller particulièrement vite. Il serait important que les programmes soient accompagnés de progressions plus précises quant à ce que les élèves doivent savoir faire, que tout le monde est à peu près les mêmes objectifs et que les maitres sachent ce qui doit être absolument consolidé (absence d'évaluation nationale).

Des dimensions cognitives générales :
Le langage, le système symbolique, la mémoire de travail, la vitesse de traitement de l'information, l'attention. On pense souvent que les difficultés relèvent des mathématiques alors que de temps en temps elles relèvent véritablement plutôt des dimensions cognitives.
Pour beaucoup d'enfants, les difficultés qui sont répertoriées comme étant des maths sont des difficultés qui portent sur d'autres domaines. Sauf qu'en cascade, ces difficultés vont rejaillir.
Il faut être attentif à ces dimensions et se demander par exemple quand un enfant a des difficultés de langage, s'il ne vaut pas mieux privilégier les chiffres arabes ; au contraire, si l'enfant a des difficultés spatiales ou dyspraxiques, alors s'il a un bon langage privilégier la dimension verbale.

Dans tous les cas, il est essentiel de mettre en œuvre des parcours individualisés pour des enfants qui ont forcément des différences interindividuelles très importantes.

Compte rendu de la conférence de Michel Fayol
« Apprendre le nombre Cycle 1 et Cycle 2 »